V. ŘEŠENÉ DIDAKTICKÉ TESTY

Didaktický test 1 ★★★★★

Didaktický test obsahuje **26 úloh**; u každé z nich je uvedeno, kolik bodů za ni lze získat. Celkové maximální bodové hodnocení testu je **50 bodů**, přičemž hranice úspěšnosti je **33 %**.

Na vyřešení testu máte celkem **105 minut**. Používat můžete jen **povolené pomůcky** (viz s. 4). Odpovědi vpisujte přímo do testu, případně i do **záznamového archu** (ke stažení na www.didaktis.cz; pokyny k vyplňování najdete na s. 9–10). Komentované řešení testu se nachází na s. 131–142, klíč k úlohám je uveden na s. 167.

1 /viz 1. celek, s. 11/ 1 bod

Jsou dána čísla $-\frac{4}{9}$ a $\frac{1}{5}$.

Určete všechna čísla $x \neq \frac{1}{5}$, jejichž obrazy mají na číselné ose od obrazu čísla $-\frac{4}{9}$ stejnou vzdálenost, jako mají od sebe obrazy čísel $-\frac{4}{9}$ a $\frac{1}{5}$.

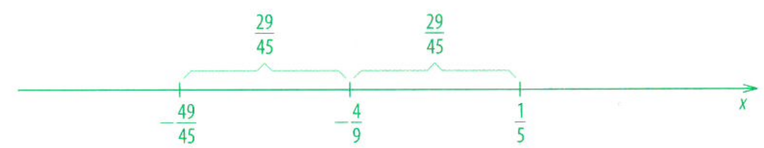
Výsledek zapište zlomkem v základním tvaru.

$$\frac{1}{5}-\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{9-(-20)}{45}=\frac{29}{45}$$

$$-\frac{4}{9}-\frac{29}{45}=\frac{-20-29}{45}=-\frac{49}{45}$$

Vyjádříme vzdálenost obrazů čísel $-\frac{4}{9}$ a $\frac{1}{5}$.

Obraz hledaného čísla leží vlevo od obrazu čísla $-\frac{4}{9}$, proto zlomek $\frac{29}{45}$ odečteme.



Zadání vyhovuje jediné číslo x, a to $-\frac{49}{45}$.

2 /viz 2. celek, s. 16/ 1 bod

Pro $x=8$ určete hodnotu výrazu $\frac{x^{-1}-\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-1}}{x^{-2}+x^{-1}}$.

Výsledek vyjádřete ve tvaru smíšeného čísla.

$$\frac{8^{-1}-\left(\sqrt[3]{8}\right)^{-1}}{8^{-2}+8^{-1}}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{64}+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{1-4}{8}}{\frac{1+8}{64}}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{64}{9}=-\frac{8}{3}=-2\frac{2}{3}$$

Do výrazu dosadíme za proměnnou x číslo 8. Využijeme pravidla pro počítání s mocninami:

$a^{-k}=\frac{1}{a^k};\ a\neq 0;\ k\in \mathbf{Z}$

3 /viz 3. celek, s. 20/ 1 bod

Pro veličiny $x, a, b \in \mathbf{R}$; $x \neq b$ platí $xa-b=ab+3x$.
Z uvedeného vztahu vyjádřete veličinu a.

Vyjadřujeme neznámou ze vzorce.

$$xa-b=ab+3x \qquad |-ab+b$$

$$xa-ab=3x+b$$

Dva členy daného vztahu obsahují veličinu a, dva členy ji neobsahují. Převedeme vhodné členy na druhou stranu rovnice tak, aby oba členy s veličinou a byly na levé a oba členy bez veličiny a na pravé straně rovnice.

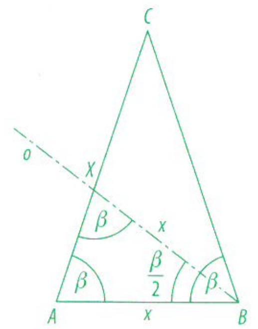
$$a\cdot(x-b)=3x+b \qquad |:(x-b)$$

$$a=\frac{3x+b}{x-b}$$

Veličinu a vytkneme a obě strany vztahu dělíme celou závorkou ležící u veličiny a.

4 V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB protíná osa o vnitřního úhlu β při vrcholu B rameno AC v bodě X. Úsečky BA a BX mají stejnou délku.
Určete ve stupních velikost úhlu β.

/viz 6. celek, s. 36/ **max. 2 body**



$$\beta+\beta+\frac{\beta}{2}=180^\circ$$
$$\frac{5\beta}{2}=180^\circ$$
$$\beta=180^\circ\cdot\frac{2}{5}$$
$$\beta=72^\circ$$

Trojúhelník ABC je rovnoramenný, oba vnitřní úhly při jeho základně AB jsou tedy shodné a mají velikost β.

Trojúhelník ABX je také rovnoramenný, protože úsečky BA a BX mají stejnou délku. Vnitřní úhly při základně AX jsou tedy shodné a mají velikost β.

Vnitřní úhel při vrcholu B trojúhelníku ABX je polovinou úhlu β, protože osa o úhel β půlí.

Součet velikostí všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABX je 180°. Z rovnice určíme velikost úhlu β.

---

5 **Pro všechna $x\in\mathbf{R}$ zjednodušte výraz $(x+4)\cdot(4-x)-(2x-1)^2$ a vypočtěte součet koeficientů $a+b+c$ výsledného trojčlenu ax^2+bx+c.**

/viz 2. celek, s. 16/ **1 bod**

$$(x+4)\cdot(4-x)-(2x-1)^2=16-x^2-(4x^2-4x+1)=$$
$$=16-x^2-4x^2+4x-1=-5x^2+4x+15$$

$$a+b+c=-5+4+15=14$$

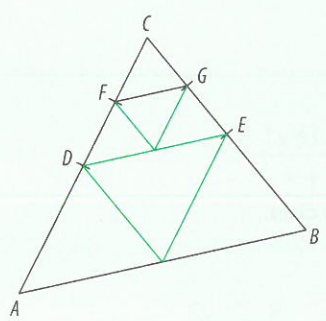
V součinu prvních dvou závorek použijeme vzorec $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$.

Třetí závorku umocníme užitím vzorce $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Nakonec sečteme koeficienty a, b, c.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

V rovině je dán trojúhelník ABC a body D, E, které jsou postupně středy úseček AC, BC. Podobně body F, G jsou postupně středy úseček DC, EC.



6 **Vyjádřete poměr obsahů trojúhelníků FGC a ABC v tomto pořadí. Poměr uveďte v základním tvaru.**

/viz 1. celek, s. 11, a 6. celek, s. 36/ **1 bod**

Úsečky DE, FG jsou po řadě středními příčkami trojúhelníků ABC a DEC.

$$S_{\triangle DEC}=\frac{1}{4}\cdot S_{\triangle ABC}$$
$$S_{\triangle FGC}=\frac{1}{4}\cdot S_{\triangle DEC}$$
$$S_{\triangle FGC}=\frac{1}{16}\cdot S_{\triangle ABC}$$
$$S_{\triangle FGC}:S_{\triangle ABC}=1:16$$

Využijeme vlastností středních příček trojúhelníku.

Střední příčky trojúhelníku jsou úsečky, jejichž krajními body jsou středy stran trojúhelníku.

Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s jeho protější stranou a její délka je rovna polovině délky této strany.

Všechny tři střední příčky trojúhelníku ho rozdělují na 4 shodné trojúhelníky se stejnými obsahy.

Lze také postupovat takto: $S_{\triangle FGC}:S_{\triangle ABC}=\dfrac{\frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{4}v_a}{2}:\dfrac{a\cdot v_a}{2}=1:16$

---

7 Pro $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3;2\}$ je dán výraz $V(x)=\dfrac{x^3-9x}{6-2x-x\cdot(x-1)}$.

/viz 2. celek, s. 16/ **max. 3 body**

7.1 **Daný výraz zjednodušte.**
V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.

$$\frac{x^3-9x}{6-2x-x\cdot(x-1)}=\frac{x\cdot(x^2-9)}{6-2x-x^2+x}=\frac{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{-x^2-x+6}=$$
$$=\frac{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{-(x^2+x-6)}=\frac{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{-(x+3)\cdot(x-2)}=\frac{x\cdot(x-3)}{2-x}$$

Pro rozklad na součin v čitateli použijeme vytýkání a vzorec $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$.

Pro rozklad kvadratického trojčlenu x^2+x-6 na součin můžeme využít např. Viètovy vzorce, případně i hodnoty -3 a 2 přímo ze zadání úlohy, které „naznačují", jak bude rozklad kvadratického trojčlenu vypadat.

7.2 **Určete, pro která x z definičního oboru je výraz roven nule.**

$$V(x)=0$$
$$\frac{x\cdot(x-3)}{2-x}=0 \quad\longrightarrow\quad x_1=0,\; x_2=3$$

Hledáme řešení rovnice v podílovém tvaru. Podíl je roven nule, je-li čitatel zlomku roven nule. Jmenovatel zlomku musí být současně různý od nuly.

Oba kořeny vyhovují danému definičnímu oboru výrazu, tj. $x_{1,2}\neq-3\wedge x_{1,2}\neq2$.

---

8 **Určete všechna $x\in\mathbf{R}$, pro která je definován výraz $V(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+4}-2}$. Výsledek zapište intervalem.**

/viz 2. celek, s. 16, a 3. celek, s. 20/ **max. 2 body**

$$\frac{x-2}{x+4}-2\geq0\wedge x\neq-4$$
$$\frac{x-2-2x-8}{x+4}\geq0\wedge x\neq-4$$
$$\frac{-x-10}{x+4}\geq0\wedge x\neq-4$$

Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a jmenovatel zlomku nenulový.

Nerovnici upravíme pomocí ekvivalentních úprav a převedeme ji na podílový tvar.

Nulové body:
$x_1=-10;\ x_2=-4$

	$(-\infty;-10)$	$(-10;-4)$	$(-4;+\infty)$
$-x-10$	+	−	−
$x+4$	−	−	+
$\dfrac{-x-10}{x+4}$	−	+	−

Nulové body -10 a -4 rozdělí množinu všech reálných čísel $\mathbf{R}$ na tři intervaly.

$x\in\langle-10;-4)$

---

9 Patnáct švadlen mělo do zahájení výstavy ušít 300 kusů stejných šatů. Denní norma je pro všech patnáct švadlen stejná. Kdyby bylo švadlen o 5 méně, musela by být denní norma pro každou švadlenu o dvoje šaty vyšší, aby stihly práci dokončit ve stejném čase.
Určete denní normu pro každou z patnácti švadlen.

/viz 3. celek, s. 20/ **max. 2 body**

15 švadlen .... 300 kusů
1 švadlena .... $300:15=20$ kusů
za x dní .... 20 kusů
za 1 den .... $\frac{20}{x}$ kusů

$15-5=10$ švadlen .... 300 kusů
1 švadlena .... $300:10=30$ kusů
za x dní .... 30 kusů
za 1 den .... $\frac{30}{x}$ kusů

V obou situacích vyjádříme denní normu pro 1 švadlenu.

Sestavíme rovnici, ve které porovnáme práci každé z 15 švadlen za 1 den (levá strana rovnice) s prací každé z 10 švadlen za 1 den (pravá strana rovnice).

$$\frac{20}{x}+2=\frac{30}{x}$$
$$20+2x=30$$
$$x=5$$

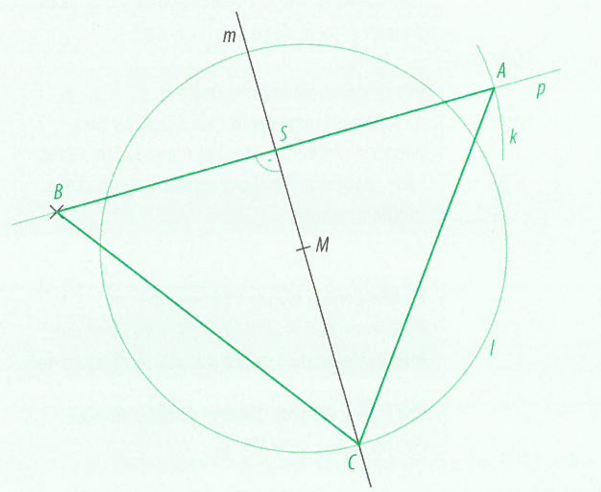
Denní norma pro 1 švadlenu se liší o 2 kusy šatů.

Denní norma pro každou z 15 švadlen: $\frac{20}{x}=\frac{20}{5}=4$ kusy

Denní norma pro každou z patnácti švadlen je 4 kusy.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V rovině jsou umístěny body B, M a přímka m, přičemž bod M leží na přímce m.



Zápis konstrukce:

1. $p; p \perp m \wedge B \in p$
2. $S; S \in p \cap m$
3. $k; k(S; |SB|)$
4. $A; A \in p \cap k \wedge A \neq B$
5. $l; l(M; 2 \cdot |MS|)$
6. $C; C \in l \cap \mapsto SM$
7. $\triangle ABC$

Úloha má právě jedno řešení.

Využijeme toho, že v rovnoramenném trojúhelníku splývá výška na základnu s těžnicí na stejnou stranu trojúhelníku.

Bod A je osově souměrný s bodem B podle přímky m.

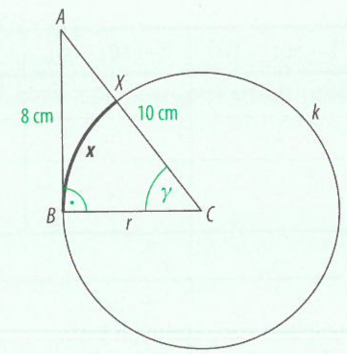
Těžiště M dělí těžnici k základně v poměru 1 : 2.

Protože je bod M těžištěm trojúhelníku ABC, musí být vnitřním bodem trojúhelníku ABC. Proto ze dvou průsečíků přímky m s kružnicí l vyhovuje zadání úlohy jediný.

10 **Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, jehož těžiště leží v bodě M a jehož těžnice na základnu AB leží na přímce m.** /viz 6. celek, s. 36/ **max. 2 body**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnou AB délky 8 cm a přeponou AC délky 10 cm. Dále je dána kružnice k, která má střed v bodě C a prochází bodem B.



11 **Vypočtěte délku vyznačeného kružnicového oblouku x s koncovými body B, X, který leží uvnitř trojúhelníku ABC. Výsledek zaokrouhlete na celé centimetry.** /viz 6. celek, s. 36/ **max. 2 body**
V záznamovém archu <u>uveďte celý</u> postup řešení.

Užitím Pythagorovy věty vypočteme délku odvěsny BC trojúhelníku ABC.

$r = \sqrt{10^2 - 8^2}\ \text{cm} = 6\ \text{cm}$

Užitím vhodné goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku ABC (v našem případě tangens) určíme velikost ostrého úhlu ACB.

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{8}{6}$

$\gamma \doteq 53°8'$

Pro délku kružnice k dostáváme: $o = 2 \cdot \pi \cdot 6\ \text{cm} = 12\pi\ \text{cm}$

Ze vzorce $o = 2\pi r$ určíme délku celé kružnice k.

Pro délku kružnicového oblouku x dostáváme: $x \doteq \frac{53°8'}{360°} \cdot 12\pi\ \text{cm} \doteq 5{,}56\ \text{cm} \doteq 6\ \text{cm}$

Délku kružnicového oblouku x vypočteme ze vzorce $x = \frac{\gamma}{360°} \cdot o$ (γ dosazujeme ve stupních).

12 **Pro přípustné hodnoty x zjednodušte výraz:** /viz 4. celek, s. 25/ **max. 2 body**

$$\frac{1}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{1+\sin x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

V záznamovém archu <u>uveďte celý</u> postup řešení.

$$\frac{1}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{1+\sin x} - \frac{2}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{1+\sin x} - \frac{2}{1-\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1+\sin x - \sin x \cdot (1-\sin x) - 2}{(1+\sin x)\cdot(1-\sin x)} = \frac{1+\sin x - \sin x + \sin^2 x - 2}{(1+\sin x)\cdot(1-\sin x)} =$$

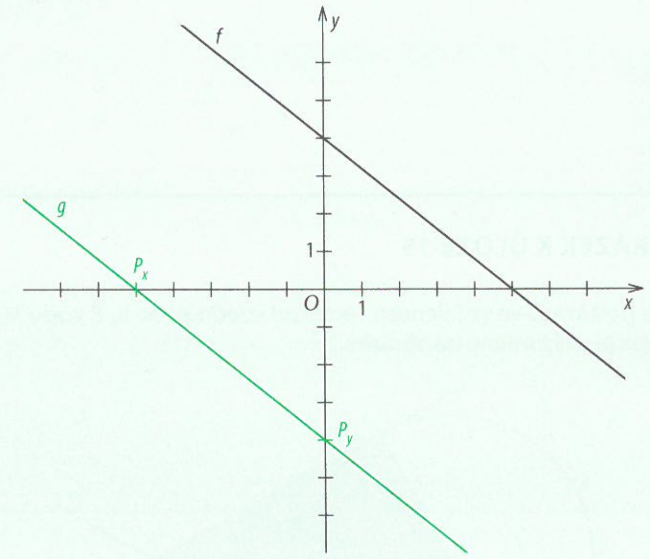
$$= \frac{\sin^2 x - 1}{1-\sin^2 x} = -1$$

Výraz převedeme na společný jmenovatel, pro jeho nalezení použijeme vzorce $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Výraz ve jmenovateli rozložíme na součin užitím algebraického vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Grafem lineární funkce f je přímka.



13 **Napište předpis lineární funkce g, je-li její graf s grafem funkce f středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic.** /viz 4. celek, s. 25/ **1 bod**

Pro funkci g platí: $P_x[-5; 0]$; $P_y[0; -4]$

$g: y = ax + b$

$P_y \in g: \quad -4 = a \cdot 0 + b$

$b = -4$

$g: y = ax - 4$

$P_x \in g: \quad 0 = -5a - 4$

$a = -\frac{4}{5}$

Pro hledaný předpis funkce tedy dostáváme:

$g: y = -\frac{4}{5}x - 4$

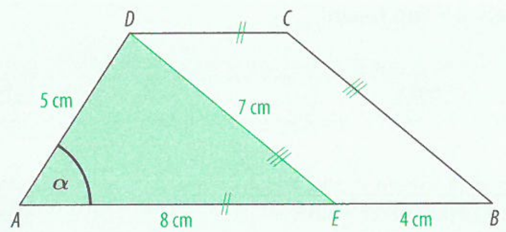
Grafem funkce f je přímka určená dvěma body – průsečíky s osami soustavy souřadnic. Obraz grafu funkce f ve středové souměrnosti se středem O určíme pomocí obrazů obou jeho průsečíků s osami soustavy souřadnic.

Druhá souřadnice průsečíku P_y odpovídá hodnotě koeficientu b.

Dosazením souřadnic průsečíku P_x do předpisu funkce g určíme hodnotu koeficientu a.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

V rovině je dán lichoběžník $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, s délkami stran $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|CD| = 4$ cm, $|AD| = 5$ cm.



14 **Vypočtěte velikost úhlu α.**
Výsledek zapište ve stupních.

/viz 6. celek, s. 36/ **max. 2 body**

Lichoběžník $ABCD$ rozdělíme na trojúhelník AED a rovnoběžník $EBCD$.

$|AE| = (12 - 4)$ cm $= 8$ cm

Z kosinové věty pro trojúhelník AED dostáváme:

$$7^2 = 5^5 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$$

$$49 = 25 + 64 - 80 \cdot \cos\alpha$$

$$80 \cdot \cos\alpha = 40$$

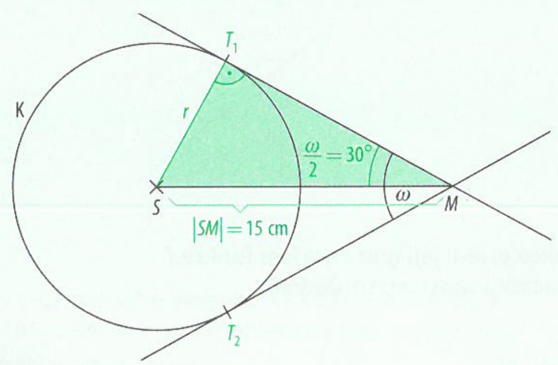
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Pro výpočet velikosti úhlu α použijeme kosinovou větu $|DE|^2 = |AE|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |AD| \cdot \cos\alpha$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

Je dána koule K a bod M tak, že bod M leží ve vzdálenosti 15 cm od středu koule K. Z bodu M je koule K vidět pod zorným úhlem o velikosti $\omega = 60^\circ$ tak, jak je znázorněno na obrázku.



15 **Určete objem koule K v litrech.**
Výsledek zaokrouhlete na desetiny litru.

/viz 6. celek, s. 36, a 7. celek, s. 42/ **max. 2 body**

Užitím vhodné goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku MT_1S (v našem případě sinus) určíme velikost poloměru r koule K.

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{|ST_1|}{|SM|}$$

$$|ST_1| = |SM| \cdot \sin\frac{\omega}{2}$$

$$r = (15 \cdot \sin 30^\circ) \text{ cm} = 7{,}5 \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 7{,}5^3 \text{ cm}^3 \doteq 1767 \text{ cm}^3 \doteq 1{,}8 \text{ l}$$

V libovolné rovině, ve které leží body S, M, jsou přímky vymezující zorný úhel ω tečnami řezu koule K. Tyto tečny jsou kolmé na úsečky ST_1 a ST_2, kde T_1 a T_2 jsou body dotyku.

Objem koule vypočteme užitím vzorce $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

16 Je dána konečná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{4}$. Pro členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{4}$ platí: a_2, a_3 jsou rovny kořenům kvadratické rovnice $3x^2 - 19x + 6 = 0$, přičemž $a_2 < a_3$; $a_3 = a_2 + 6 \cdot a_1$; $a_4 = a_3 + 6 \cdot a_2$.

/viz 5. celek, s. 31/ **max. 2 body**

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
16.1	Druhý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{4}$ je roven číslu 6.	☐	☒
16.2	Čtvrtý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{4}$ je roven číslu 8.	☒	☐
16.3	Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{4}$ je geometrická.	☐	☒
16.4	První člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{4}$ je menší než číslo 1.	☒	☐

16.1 $3x^2 - 19x + 6 = 0$

$D = (-19)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 289$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm 17}{2 \cdot 3} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} = a_2 \\ x_2 = 6 = a_3 \end{cases}$$

Správná odpověď je **N**.

16.2 $a_4 = a_3 + 6 \cdot a_2 = 6 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 8$

Správná odpověď je **A**.

16.3 $\frac{a_3}{a_2} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18$ $\qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\frac{a_3}{a_2} \neq \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow$ posloupnost není geometrická

Správná odpověď je **N**.

Kvocient q geometrické posloupnosti, kde $q \neq 0$, vyjadřuje poměr libovolného jejího členu (kromě prvního členu) a členu předcházejícího.

16.4 $6 = \frac{1}{3} + 6 \cdot a_1$

$a_1 = \frac{17}{18} < 1$

Správná odpověď je **A**.

Použijeme daný vztah $a_3 = a_2 + 6 \cdot a_1$.

17 Mzdy tří brigádníků lze vyjádřit podle jejich výkonnosti postupným poměrem 4 : 5 : 6. Nejvýkonnější pracovník obdržel za kalendářní týden hrubou mzdu 5 400 Kč, ze které mu byla stržena 15% daň.
Jaká byla čistá mzda za stejné období nejméně výkonného pracovníka?

/viz 1. celek, s. 11/ **2 body**

A) 2 940 Kč
B) 3 060 Kč
C) 3 240 Kč
D) 3 300 Kč
E) 3 600 Kč

Pomocí daného postupného poměru nejprve určíme hrubou mzdu nejméně výkonného pracovníka:

6 dílů .... 5 400 Kč
1 díl .... 900 Kč
4 díly .... 3 600 Kč

Pro čistou mzdu nejméně výkonného pracovníka dostáváme:

85 % $\cdot$ 3 600 Kč $= 0{,}85 \cdot 3\,600$ Kč $= 3\,060$ Kč

Správná odpověď je **B**.

Vypočteme nejmenší člen poměru, známe-li největší.

Po odečtení daně v Kč zbude 100 % − 15 % = 85 % z hrubé mzdy.

18 Pro všechna $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$ je dána rovnice $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x\cdot(x+2)} = \frac{1}{x\cdot(x-2)}$. /viz 3. celek, s. 20/ **2 body**

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

A) Daná rovnice nemá žádné řešení.
B) Daná rovnice má právě 1 řešení.
C) Daná rovnice má právě 1 kladné a právě 1 záporné řešení.
D) Daná rovnice má právě 2 kladná řešení.
E) Daná rovnice má nekonečně mnoho řešení.

$$\frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x\cdot(x+2)} = \frac{1}{x\cdot(x-2)}$$

$$\frac{2}{(x+2)\cdot(x-2)} + \frac{x-4}{x\cdot(x+2)} = \frac{1}{x\cdot(x-2)} \qquad \Big|\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

$$2x+(x-4)\cdot(x-2) = x+2$$

$$2x+x^2-6x+8 = x+2 \qquad \Big|-x-2$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$D=(-5)^2-4\cdot 6=1$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}= \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \quad \text{nevyhovuje} \end{cases}$$

$$K=\{3\}$$

Správná odpověď je **B**.

Rovnici řešíme pomocí ekvivalentních úprav.

Kvadratickou rovnici upravíme na tvar $ax^2+bx+c=0$ a řešíme pomocí diskriminantu.

Pro rozklad kvadratického trojčlenu x^2-5x+6 na součin bychom mohli využít také Viètovy vzorce.

19 Je dána funkce f: $y=x^2+2x-3$, která má definiční obor $D(f)=\langle -4; 4)$. /viz 4. celek, s. 25/ **2 body**

Jaký je obor hodnot funkce f?

A) $\langle -4; 5)$
B) $\langle -4; 5\rangle$
C) $\langle -4; 21)$
D) $\langle -4; 21\rangle$
E) $\langle 5; 21\rangle$

Pomocná kvadratická rovnice:

$$x^2+2x-3=0$$

$$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2}= \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=1 \end{cases}$$

$$x_V=\frac{-3+1}{2}=-1$$

$$y_V=f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-3=-4$$

$$V[-1;-4]$$

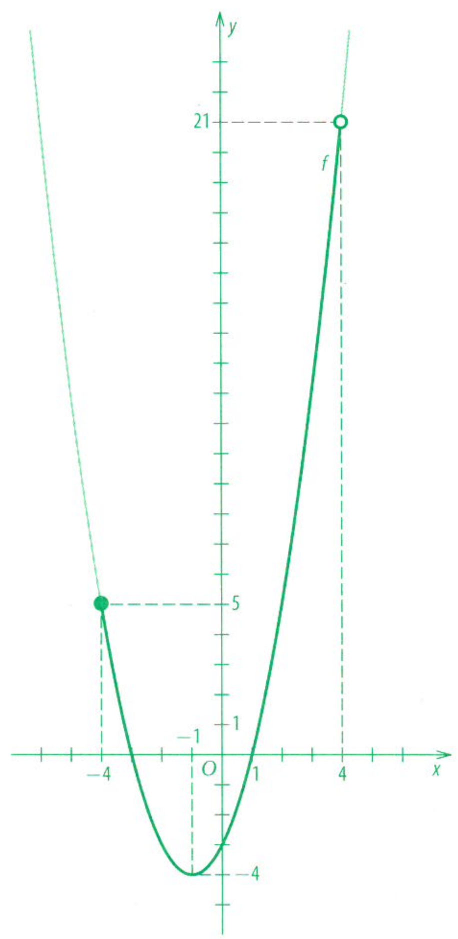
Vypočteme hodnoty funkce f v krajních bodech intervalu $\langle -4; 4)$:

$$f(-4)=(-4)^2+2\cdot(-4)-3=5$$

$$f(4)=4^2+2\cdot 4-3=21$$

$$H(f)=\langle -4; 21)$$

Správná odpověď je **C**.



Průsečíky grafu funkce f s osou x mají souřadnice $P_1[x_1; 0]$ a $P_2[x_2; 0]$. Hodnoty x_1, x_2 vypočteme jako kořeny pomocné kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$.

Užitím aritmetického průměru z vypočtených hodnot x_1, x_2 určíme x-ovou souřadnici vrcholu V.

Pro lepší názornost si můžeme načrtnout graf funkce f.

Obor hodnot funkce f určíme pomocí y-ových souřadnic vrcholu V a obou krajních bodů intervalu $\langle -4; 4)$.

20 Pro $x>0$ jsou dány následující tři funkce. /viz 4. celek, s. 25/ **2 body**

f: $y=\log(4x)$; g: $y=\log x+\frac{1}{2}\log 16$; h: $y=\log(5x)-\log x$

Které z těchto funkcí se sobě rovnají?

A) Pouze funkce f, g.
B) Pouze funkce f, h.
C) Pouze funkce g, h.
D) Všechny tři funkce f, g, h navzájem.
E) Žádné dvě z daných funkcí se navzájem nerovnají.

Upravíme si předpisy funkcí g, h.

$$g\colon y=\log x+\frac{1}{2}\log 16=\log x+\log\sqrt{16}=\log x+\log 4=\log(4x)$$

$$h\colon y=\log(5x)-\log x=\log\frac{5x}{x}=\log 5$$

Správná odpověď je **A**.

Při úpravě předpisů funkcí využijeme věty o logaritmech
$\log a^n = n\cdot\log a$,
$\log a+\log b=\log(a\cdot b)$,
$\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$,
kde $a>0$; $b>0$; $n\in\mathbf{R}$.

21 Je dána rovnice $\frac{3^{x^2-x}}{27^{x-1}}=\left(\sqrt{3}\right)^{x+2}$. /viz 4. celek, s. 25/ **2 body**

Která z následujících množin je množinou všech řešení dané rovnice?

A) $\{4\}$
B) $\left\{-4; \frac{1}{2}\right\}$
C) $\left\{-4; -\frac{1}{2}\right\}$
D) $\left\{-\frac{1}{2}; 4\right\}$
E) $\left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$

$$\frac{3^{x^2-x}}{27^{x-1}}=\left(\sqrt{3}\right)^{x+2}$$

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^{3\cdot(x-1)}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+2}$$

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^{3x-3}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+2}$$

$$3^{x^2-x-(3x-3)}=3^{\frac{x+2}{2}}$$

$$x^2-x-3x+3=\frac{x+2}{2} \qquad \Big|\cdot 2$$

$$2x^2-8x+6=x+2 \qquad \Big|-x-2$$

$$2x^2-9x+4=0$$

$$D=(-9)^2-4\cdot 2\cdot 4=49$$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm 7}{2\cdot 2}= \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$K=\left\{4; \frac{1}{2}\right\}$$

Správná odpověď je **E**.

Při úpravách obou stran rovnice na stejný základ použijeme pravidla pro počítání s mocninami
$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$,
$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$,
$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$,
kde $a>0$; $m\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{N}$.

Mocniny o stejném základu se rovnají právě tehdy, rovnají-li se jejich exponenty.

Protože jsou v možnostech A–E uvedeny konkrétní hodnoty, můžeme úlohu také řešit postupným dosazováním těchto hodnot do dané rovnice.

22 Kovovému kvádru, který byl zbroušen opět do tvaru kvádru, se zmenšily všechny jeho rozměry o $\frac{2}{5}$ z původních rozměrů. /viz 1. celek, s. 11, a 7. celek, s. 42/ **2 body**

O kolik procent se zmenšil jeho objem?

A) o 6,4 %
B) o 21,6 %
C) o 40 %
D) o 78,4 %
E) o 93,6 %

Původní rozměry kvádru .... $a; b; c$

Nové rozměry kvádru .... $0{,}6a; 0{,}6b; 0{,}6c$

Původní objem kvádru .... $V = a \cdot b \cdot c$

Nový objem kvádru .... $V' = 0{,}6a \cdot 0{,}6b \cdot 0{,}6c = 0{,}216 \cdot a \cdot b \cdot c = 0{,}216 \cdot V = 21{,}6\ \% \cdot V$

Pro zmenšení objemu kvádru tedy platí: $100\ \% - 21{,}6\ \% = 78{,}4\ \%$

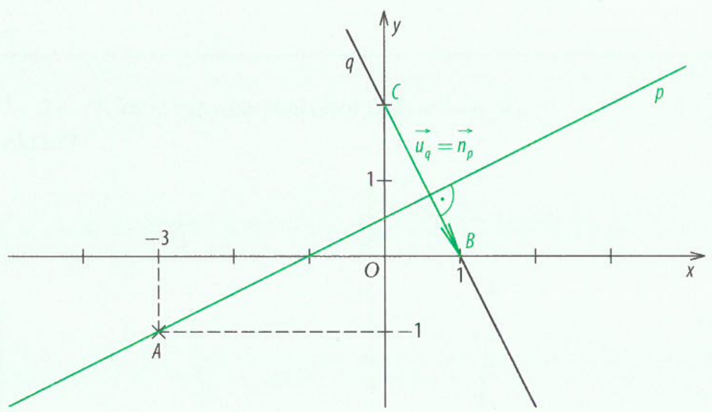
Správná odpověď je **D**.

Všechny rozměry se zmenší o $\frac{2}{5}$, tj. o 0,4 své délky.

Nové rozměry proto tvoří 0,6 původních rozměrů kvádru.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 23

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je dána přímka q a bod A. Přímka p je kolmá k přímce q a prochází bodem A.



23 **Která rovnice vyjadřuje směrnicový tvar rovnice přímky p?** /viz 8. celek, s. 47/ **2 body**

A) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
B) $y = \frac{1}{2}x + 1$
C) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
D) $y = 2x + 1$
E) $y = 2x + 5$

Pomocí průsečíků přímky q s osami kartézské soustavy souřadnic určíme směrový vektor přímky q.

$C[0; 2]; B[1; 0]$

$\vec{u}_q = \vec{n}_p = B - C = (1; -2)$

$p: x - 2y + c = 0$

Dosadíme souřadnice bodu A do rovnice přímky p.

$A[-3; -1] \in p: \quad -3 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$

Dostáváme: $p: x - 2y + 1 = 0$

$p: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Správná odpověď je **A**.

Najdeme obecnou rovnici přímky p: $ax + by + c = 0$, kde a, b jsou souřadnice normálového vektoru přímky p.

Směrový vektor přímky q je současně normálovým vektorem přímky p (nebo jeho libovolným nenulovým násobkem).

Směrnicový tvar rovnice přímky p získáme vyjádřením proměnné y z obecné rovnice této přímky.

24 **Jaký je součet všech přirozených trojciferných čísel, která jsou dělitelná jedenácti?** /viz 5. celek, s. 31/ **2 body**

A) 40 095
B) 43 450
C) 43 960
D) 44 000
E) 44 550

$a_1 = 110;\ a_n = 990;\ d = 11$

$110 + (n-1) \cdot 11 = 990$

$(n-1) \cdot 11 = 880$

$n - 1 = 80$

$n = 81$

Pro člen posloupnosti, který máme sčítat jako poslední, platí:

$a_{81} = 990$

$s_{81} = \frac{81}{2} \cdot (110 + 990) = 44\,550$

Správná odpověď je **E**.

Všechna přirozená trojciferná čísla dělitelná jedenácti jsou členy aritmetické posloupnosti.

Pro zjištění počtu čísel použijeme vzorec pro n-tý člen posloupnosti $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Pro výpočet hledaného součtu čísel použijeme vzorec $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

25 **Přiřaďte ke každému zadání (25.1–25.4) odpovídající hodnotu proměnné p (A–F).** /viz 8. celek, s. 47/ **max. 4 body**

25.1 Velikost vektoru $\vec{u} = (p-3; 6)$, kde $p > 0$, je $3\sqrt{5}$ j. — E

25.2 Vektory $\vec{v} = (-3; 2p)$ a $\vec{w} = (-4; -2)$ jsou na sebe kolmé. — B

25.3 Bod $A[3; p]$ leží na přímce m: $x = 1 - t;\ y = -2t;\ t \in \mathbf{R}$. — C

25.4 Vzdálenost bodu $P[p; 1]$, kde $p > 0$, od přímky n: $3x - 4y + 4 = 0$ je rovna 3 j. — D

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6
F) 7

25.1 $3\sqrt{5} = \sqrt{(p-3)^2 + 6^2}$

$45 = p^2 - 6p + 9 + 36 \quad |-45$

$0 = p^2 - 6p$

$p \cdot (p - 6) = 0$

$p_1 = 0$ nevyhovuje

$p_2 = 6$

Správné přiřazení je **E**.

Pro velikost vektoru $\vec{u} = (a; b)$ platí $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

25.2 $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$(-3) \cdot (-4) + 2p \cdot (-2) = 0$

$12 - 4p = 0$

$p = 3$

Správné přiřazení je **B**.

Skalární součin dvou kolmých vektorů musí být roven nule.

Jsou-li souřadnice vektorů $\vec{v} = (v_1; v_2)$ a $\vec{w} = (w_1; w_2)$, pak pro jejich skalární součin platí $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$.

25.3
$A[3; p] \in m: \quad 3 = 1 - t \Rightarrow t = -2$

$p = (-2) \cdot (-2) = 4$

Správné přiřazení je **C**.

Dosadíme souřadnice bodu A do obou parametrických rovnic přímky m.

25.4 $\frac{|3p - 4 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3$

$\frac{|3p|}{\sqrt{25}} = 3$

$|3p| = 15$

$|p| = 5$

$p_1 = -5$ nevyhovuje

$p_2 = 5$

Správné přiřazení je **D**.

Označíme-li rovnici přímky n: $ax + by + c = 0$ a souřadnice bodu $P[x_P; y_P]$, pak vzdálenost bodu P od přímky n určíme pomocí vzorce $v(P, n) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

26 V atletickém oddílu je celkem 12 sportovců, z toho 7 chlapců a 5 dívek. /viz 9. celek, s. 51/ max. 3 body

Přiřaďte ke každé úloze (26.1–26.3) odpovídající výsledek (A–E).

26.1 Určete, kolika způsoby lze do soutěže vybrat smíšené družstvo tří chlapců a dvou dívek, je-li jeden chlapec zraněn, a nemůže být proto zařazen do výběru. C

26.2 Určete počet všech možných pořadí běžců v pětičlenné chlapecké štafetě, jsou-li dva chlapci nemocní, a nemohou se proto štafetového závodu zúčastnit. B

26.3 Určete, kolika způsoby lze vybrat právě tři chlapce ze všech chlapců v oddílu tak, aby každý z nich reprezentoval oddíl v jedné ze tří různých disciplín. D

A) 35
B) 120
C) 200
D) 210
E) 350

26.1

$$\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{2}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=20\cdot 10=200$$

Správné přiřazení je **C**.

Počet k-členných kombinací (bez opakování) z n prvků je dán vzorcem $K(k;n)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, kde $k, n\in\mathbf{N}$; $k\leq n$.

26.2

$P(5)=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$

Správné přiřazení je **B**.

Počet permutací (bez opakování) z n prvků je dán vzorcem $P(n)=n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, kde $n\in\mathbf{N}$.

Úlohu lze řešit také bez použití vzorce. Na prvním úseku štafety poběží jeden z pěti chlapců, na druhém úseku jeden ze zbývajících čtyř chlapců atd.
Dostáváme celkem $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ možných pořadí běžců.

26.3

$V(3;7)=\frac{7!}{4!}=7\cdot 6\cdot 5=210$

Správné přiřazení je **D**.

Počet k-členných variací (bez opakování) z n prvků je dán vzorcem $V(k;n)=\frac{n!}{(n-k)!}$, kde $k, n\in\mathbf{N}$; $k\leq n$.

Úlohu lze řešit také bez použití vzorce. V jedné disciplíně bude reprezentovat jeden ze sedmi chlapců, ve druhé disciplíně jeden ze zbývajících šesti chlapců a ve třetí disciplíně jeden ze zbývajících pěti chlapců.
Dostáváme celkem $7\cdot 6\cdot 5=210$ různých způsobů.