POSLOUPNOSTI A FINANČNÍ MATEMATIKA

ZÁKLADNÍ POZNATKY O POSLOUPNOSTECH

- **nekonečná posloupnost**
  - funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel
- **konečná posloupnost**
  - funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel menších nebo rovných pevně danému přirozenému číslu n_0
- **zadání posloupnosti**
  - **výčtem členů, např.**
    - 2; 4; 6; 8; ... (nekonečná posloupnost)
    - 3; 6; 9; 12 (konečná posloupnost)
  - **vzorcem pro n-tý člen, např.**
    - $a_n = 2n$ (nekonečná posloupnost), zapisujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (2n)_{n=1}^{\infty}$
    - $b_n = 3n, n \leq 4$ (konečná posloupnost) zapisujeme $(b_n)_{n=1}^{4} = (3n)_{n=1}^{4}$
  - **rekurentní zadání**
    - určen jeden nebo několik prvních členů posloupnosti a rekurentní vzorec (udává, jak vypočítat n-tý člen posloupnosti pomocí členů předcházejících), např. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2$

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

- každá taková posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které existuje reálné číslo d tak, že pro každé přirozené číslo n je $a_{n+1} = a_n + d$
- číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti
- **důsledek**
  - $a_{n+1} - a_n = d$ **... v aritmetické posloupnosti**
  - rozdíl dvou po sobě jdoucích členů je konstantní a rovný diferenci, např. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (2n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí rovnou 2
- **vzorec pro n-tý člen aritmetické posloupnosti**
  - $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
- **vztah mezi dvěma členy aritmetické posloupnosti**
  - $a_r = a_s + (r-s) \cdot d$
- **součet prvních n členů aritmetické posloupnosti**
  - $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \dfrac{n}{2}$

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

- každá taková posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které existuje reálné číslo q tak, že pro každé přirozené číslo n je $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti
- **důsledek**
  - jsou-li členy geometrické posloupnosti nenulové, lze napsat $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, v geometrické posloupnosti s nenulovými členy je podíl dvou po sobě jdoucích členů konstantní a rovný kvocientu, např. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (2^n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem rovným 2
- **vzorec pro n-tý člen geometrické posloupnosti**
  - $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- **vztah mezi dvěma členy geometrické posloupnosti**
  - $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$
- **součet prvních n členů geometrické posloupnosti**
  - $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

UŽITÍ GEOMETRICKÝCH POSLOUPNOSTÍ

- **pravidelný růst veličiny K o pevný počet procent**
  - $K_n = K_0\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n$
    - K_0...... počáteční hodnota veličiny K
    - K_n...... hodnota veličiny K po n obdobích
    - p....... počet procent, o který se hodnota veličiny K zvýší po 1 období
- **pravidelný pokles veličiny K o pevný počet procent**
  - $K_n = K_0\left(1 - \dfrac{p}{100}\right)^n$

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

1 **Vypočtěte první tři členy posloupnosti $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$. Rozhodněte, kolikátý člen posloupnosti je roven 0,501 25.**

$a_1 = 1 \qquad a_2 = \dfrac{3}{4} \qquad a_3 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{n+1}{2n} = 0{,}501\,25$

$n + 1 = 1{,}002\,5\,n$

$1 = 0{,}002\,5\,n$

$n = 400 \quad \rightarrow \quad a_{400} = 0{,}501\,25$

1 **Pro každé dva sousední členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí rovnost $a_{n+1} = 2\left(a_n + \dfrac{9}{a_n}\right)$. Určete její první člen, jestliže $a_2 = 12$.**

2 **V aritmetické posloupnosti 11; 15; 19; ... vypočtěte 27. člen.**

$a_1 = 11, d = 4$

$a_{27} = a_1 + 26d = 11 + 26 \cdot 4 = 115$

2 **V aritmetické posloupnosti −12; −5; 2; ... vypo-čtěte součet prvních 50 členů.**

3 **Na šachovnici 8 × 8 kladete zrnka rýže. Na první políčko položíte 3 zrnka, na druhé o dvě zrnka více, na třetí o dvě více než na druhé atd. Kolik zrnek rýže položíte na celou šachovnici?**

Počty zrnek na jednotlivých políčkách tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 3$, $d = 2$.

$s_{64} = (a_1 + a_{64}) \cdot \dfrac{64}{2} = (a_1 + a_1 + 63d) \cdot 32 =$

$= (3 + 3 + 126) \cdot 32 = 4\,224$

Na šachovnici položíme 4 224 zrnek rýže.

3 **Vypočtěte součet všech trojciferných čísel dělitel-ných pěti.**

4 **Velikosti vnitřních úhlů pětiúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost, nejmenší z úhlů má velikost 60°. Určete velikost největšího vnitřního úhlu pětiúhelníku.**

Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního pětiúhelníku:

$s_5 = 540°$

Součet pěti prvních členů aritmetické posloupnosti:

$s_5 = (\alpha_1 + \alpha_5) \cdot \dfrac{5}{2}$

$(\alpha_1 + \alpha_5) \cdot \dfrac{5}{2} = 540°$

$(60° + \alpha_5) \cdot \dfrac{5}{2} = 540° \quad \Rightarrow \quad \alpha_5 = 156°$

Největší vnitřní úhel v pětiúhelníku má velikost 156°.

4 **Částku 10 000 Kč je třeba rozdělit mezi 4 praco[vní]-níky tak, aby odměny jednotlivých pracovní[ků] tvořily aritmetickou posloupnost a nejmenší o[d]-měna byla 1 300 Kč.**

5 **Je dána posloupnost 4, 7, 10, 13, 16, ..., 301. Vypočtěte, o kolik se zmenší součet posloupnosti, jestliže z dané posloupnosti odstraníte každý třetí člen.**

Daná posloupnost je aritmetická, $a_1 = 4$, $d = 3$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$301 = 4 + (n-1)3$

$n = 100$

Odstraníme $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{99}$ ... Tvoří aritmetickou posloupnost, $b_1 = a_3 = 10$, $d' = 9$, $a_{99} = b_{33} = 298$.

$s'_{33} = (b_1 + b_{33}) \cdot \dfrac{33}{2} = (10 + 298) \cdot \dfrac{33}{2} = 5\,082$

Součet se zmenší o 5 082.

5 **Vypočtěte součet všech dvojciferných přirozených čísel, která jsou dělitelná třemi a nejsou dělitelná dvěma.**

6 **Mezi čísla 3 a 384 je vloženo 6 kladných čísel tak, že všechna čísla dohromady tvoří geometrickou posloupnost. Určete součet vložených čísel.**

$a_1 = 3, a_8 = 384$

$a_8 = a_1 \cdot q^7 \quad \Rightarrow \quad 384 = 3 \cdot q^7 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[7]{\dfrac{384}{3}} = 2$

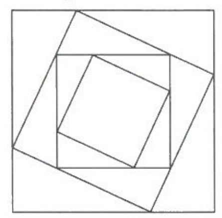
$s_8 = \dfrac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \dfrac{3(2^8 - 1)}{1} = 765$

Součet vložených čísel:

$s = s_8 - a_1 - a_8 = 765 - 3 - 384 = 378$

6 **Druhý člen geometrické posloupnosti je roven 6, pátý člen $\dfrac{16}{9}$. Vypočtěte součet prvních 8 členů dané posloupnosti.**

7 **Je dán čtverec o straně $a = 6$ cm. Do něho je vepsán další čtverec tak, že jeho vrcholy dělí stranu původního čtverce v poměru 1 : 3. Stejným způsobem jsou vepisovány další čtverce. Určete délku strany patnáctého čtverce a součet obsahů prvních deseti čtverců.**



Pro stranu $n+1$. čtverce platí: $a_{n+1}^2 = \left(\dfrac{a_n}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3a_n}{4}\right)^2$

$a_{n+1}^2 = \dfrac{10}{16} a_n^2 \quad \Rightarrow \quad$ obsahy čtverců tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $\dfrac{10}{16} \quad \Rightarrow$

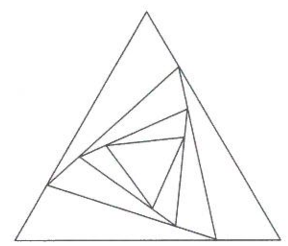
$s_{10} = a_1^2 \cdot \dfrac{\left(\dfrac{10}{16}\right)^{10} - 1}{\dfrac{10}{16} - 1} \doteq 95{,}12 \text{ cm}^2$

$a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{10}}{4} a_n \quad \Rightarrow \quad$ strany čtverců tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Délka strany 15. čtverce:

$a_{15} = a_1 q^{14} = 6 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^{14} \text{ cm} \doteq 0{,}22 \text{ cm}$

7 **Je dán rovnostranný trojúhelník o straně $a = 6$ cm. Do něho je vepsaný další rovnostranný trojúhelník tak, že jeho vrcholy dělí stranu původního trojúhelníku v poměru 1 : 2. Stejným způsobem jsou vepisovány další trojúhelníky. Určete délku strany desátého trojúhelníku a součet obsahů prvních patnácti trojúhelníků. Výsledky uveďte v cm, resp. v cm², s přesností na dvě desetinná místa.**



NEJČASTĚJŠÍ CHYBY U MATURITNÍ ZKOUŠKY

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Petr začal pravidelně běhat na běžeckém páse. Sedm dní v týdnu běhá stejně dlouho. Vždy po týdnu tento časový interval prodlouží oproti minulému týdnu v poměru 5 : 4. Ve 3. týdnu běhá o 18 minut déle než 1. týden.

MZ 2020

1

1.1 Jaký měl Petr časový interval v prvním týdnu?

1.2 Kolik minut bude běhat 5. týden? Výsledek zaokrouhlete na celé minuty.

$q = \frac{5}{4}$

1.1 **I.** $a_3 = 18 + a_1$

II. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_3 = a_1 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$a_3 = a_1 \cdot \frac{25}{16}$

I. + II. $a_3 = 18 + a_1$

$a_1 \cdot \frac{25}{16} = 18 + a_1$

$\frac{9}{16} a_1 = 18$

$a_1 = 32$

První týden běhal Petr 32 minut.

1.2 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_5 = 32 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{5-1}$

$a_5 = 78 \text{ min}$

Pátý týden bude běhat 78 minut.

Než začneme příklad řešit, rozhodneme, jestli se jedná o aritmetickou, nebo geometrickou posloupnost. Aritmetická posloupnost je taková posloupnost, v níž je rozdíl každých dvou bezprostředně po sobě jdoucích členů konstantní. Tomuto rozdílu říkáme diference a značíme jej d. Tedy $d = a_{n+1} - a_n$ a $a_{n+1} = a_n + d$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Geometrická posloupnost je taková posloupnost, v níž je podíl dvou sousedních členů konstantní. Tomuto podílu říkáme kvocient a značíme jej q. Tedy $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ a $a_{n+1} = a_n \cdot q$, kde $n \in \mathbb{N}$.

K vyjádření n-tého členu geometrické posloupnosti využijeme vzorec $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

1.1 Sestavíme si rovnice podle zadání a vypočítáme soustavu rovnic.

Příklad lze řešit i jinými způsoby.

Poměr představuje zlomek, kterým násobíme předchozí člen – posloupnost je tedy geometrická.

Zlomek umocníme tak, že umocníme čitatele a jmenovatele zvlášť: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Poměr 5 : 4, který si můžeme představit jako zlomek $\frac{5}{4}$, představuje kvocient geometrické posloupnosti (změnit číslo v poměru $a : b$ znamená vynásobit toto číslo zlomkem $\frac{a}{b}$).

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

V truhlárně v Kocourkově se rozhodli vyrábět stavebnici z kostek tvaru krychle dvou barev – modré a červené. Ve stavebnici by bylo celkem 12 kostek. Nejmenší, modrá, by měla hranu o velikosti 5 cm. Druhá by byla červená s hranou délky 15 cm. Pak by byla opět modrá, pak červená atd. Každá další kostka by měla velikost třikrát větší než předchozí (třetí, modrá, tedy 45 cm; čtvrtá, červená, 135 cm atd.).

MZ 2020

2

2.1 Jak velkou hranu by měla 12. kostka?

2.2 Jak vysoký by byl „komín" postavený ze všech modrých kostek?

$a_1 = 5$ .... modrá

$a_2 = 15$ ...... červená

$a_3 = 45$ ...... modrá

$a_4 = 135$ .... červená

$\vdots$

$q = 3$

$a_{12} = ? \quad s_6 = ?$

2.1 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{12} = 5 \cdot 3^{12-1}$

$a_{12} = 885\,735$

Dvanáctá kostka by měla hranu o délce 885 735 cm.

2.2 $a_1 = 5$

$a_2 = 45$

$\vdots$

$q = 9$

$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$s_6 = 5 \cdot \frac{9^6 - 1}{9 - 1}$

$s_6 = 332\,150$

„Komín" by byl vysoký 332 150 cm.

Nejprve rozhodneme, jestli se jedná o aritmetickou, nebo geometrickou posloupnost. Viz úloha 1.

V zadání je řečeno, že rozměr každé další kostky se zvětšil 3krát – jde tedy o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 3$.

2.2 Pracujeme jen s modrými kostkami, tedy s každou druhou kostkou ve stavebnici. První kostka (tady a_1) má hranu o velikosti 5 cm, druhá modrá (a_2) má hranu 45 cm atd. Kvocient v tomto případě je tedy 9.

Modrých kostek je ve stavebnici polovina, tedy 6.

Použijeme vzorec $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Bylo by také možné spočítat velikosti hran každé ze šesti modrých kostek a pak je sečíst.

Je vhodné si vypsat několik členů posloupnosti (zvlášť v příkladu 2.2) tak, aby byl jasný kvocient této posloupnosti.

Máme-li spočítat výšku „komínu" z kostek, je třeba si uvědomit, že chceme součet jejich hran.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Alena se připravuje na přijímací zkoušky na vysokou školu. Každý den se učí o něco déle. Rozdíl délky učení kterýchkoli dvou po sobě jdoucích dnů je konstantní. Pátý den se učila 80 minut, což bylo o 25 minut méně než první tři dny dohromady.

3 **Jak dlouho se Alena učila čtvrtý den?** MZ 2020

$a_5 = 80$ min

$a_1 + a_2 + a_3 = 80 + 25 = 105$ min

I. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d$

$80 = a_1 + 4d$

II. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_2 = a_1 + (2-1) \cdot d$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_1 + a_2 + a_3 = 105$

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 105$

$3a_1 + 3d = 105$

$a_1 + d = 35$

I. + II. $a_1 + 4d = 80$

$a_1 + d = 35 \quad | \cdot (-1)$

$a_1 + 4d = 80$

$-a_1 - d = -35$

$3d = 45$

$d = 15$

$a_1 + d = 35$

$a_1 + 15 = 35$

$a_1 = 20$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_4 = 20 + (4-1) \cdot 15$

$a_4 = 65$ min

Čtvrtý den se Alena učila 65 minut.

Nejprve rozhodneme, jestli se jedná o aritmetickou, nebo geometrickou posloupnost. Viz úloha 1. Zde je řečeno, že „rozdíl délky učení kterýchkoli dvou po sobě jdoucích dnů je konstantní", a jde tedy o aritmetickou posloupnost. Ze zadání známe její pátý člen.

K vyjádření n-tého členu aritmetické posloupnosti využijeme vzorec $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$. Vyjádříme si všechny členy, které k výpočtu potřebujeme.

Příklad lze řešit i jinak.

Všechny členy, se kterými počítáme, si vyjádříme pomocí vzorce pro n-tý člen nebo pomocí definice aritmetické posloupnosti. Získáme tak dvě rovnice, ve kterých budou pouze dvě neznámé.

4 **V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 2{,}5$ platí, že součin prvního a druhého členu je roven převrácené hodnotě třetího členu.** MZ 2020

(Řešení uveďte ve zlomcích.)

4.1 Vypočtěte kvocient této posloupnosti.

4.2 Vypočtěte čtvrtý člen této posloupnosti.

$a_1 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$

$a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{a_3}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_2 = \frac{5}{2} \cdot q$

$a_3 = \frac{5}{2} \cdot q^2$

4.1 $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{a_3}$

$\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot q = \frac{1}{\frac{5}{2} \cdot q^2}$

$\frac{25}{4} \cdot q = \frac{1}{\frac{5}{2} \cdot q^2}$

$\frac{125}{8} \cdot q^3 = 1$

$q^3 = \frac{8}{125}$

$q = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$

4.2 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_4 = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{4-1}$

$a_4 = \frac{4}{25}$

V zadání je řečeno, že se jedná o geometrickou posloupnost, ve které známe první člen.

Všechny členy v posloupnosti v této rovnici je třeba vyjádřit pomocí prvního členu a kvocientu. K tomu využijeme buď vzorec ($a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$), nebo definici geometrické posloupnosti.

Převrácená hodnota čísla a je $\frac{1}{a}$.

Opačné číslo k a je $-a$.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Banka při poskytování úvěrů používá složené úročení s ročním úrokovacím obdobím a s připisováním úroků na konci roku. Banka poskytla klientce na počátku roku úvěr, který klientka začala splácet až po uplynutí čtyř let. Za tuto dobu úroky navýšily dlužnou částku o 56 %.

5 **Jaká byla roční úrokovací míra? Výsledek zaokrouhlete na desetiny procenta.** MZ 2020

A) menší než 10,2 %

B) 10,2 %

C) 11,8 %

D) 14,0 %

E) větší než 56,0 %

100 % + 56 % = 156 %

a_0

$a_n = 1{,}56 \cdot a_0$

$n = 4$

$p = ?$

$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

$1{,}56 \cdot a_0 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 \quad | : a_0$

$1{,}56 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$

$\sqrt[4]{1{,}56} = 1 + \frac{p}{100}$

$1{,}118 = 1 + \frac{p}{100}$

$0{,}118 = \frac{p}{100} \Rightarrow p = 11{,}8\ \% \rightarrow$ možnost C)

Použijeme vzorec určený pro výpočet složeného úrokování: $a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Zadané údaje dosadíme do vzorce a dopočítáme velikost úrokové míry.

Příklad lze řešit i jinými způsoby.

Velikost úrokové míry není stejná jako velikost navýšené částky. Není to ani její čtvrtina. To by platilo v případě jednoduchého úrokování. Jde o složené úrokování, které představuje geometrickou posloupnost.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Vytváříme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.
Druhý člen je v obou posloupnostech stejný: $a_2 = b_2 = 30$.
V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předcházející člen vždy o 20 % **prvního** členu.
V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předcházející člen vždy o 20 % **předchozího** členu.

6

6.1 Jaký je poměr $b_4 : a_{10}$?

A) 1 : 2
B) 13 : 17
C) 108 : 175
D) 175 : 108
E) Oba členy jsou stejné.

6.2 Vypočtěte k nejmenšího členu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, který je větší než 200 ($a_k > 200$).

6.1 a_n: aritmetická posloupnost

$a_2 = 30$

$120\ \% \ldots\ldots 30$
$100\ \% \ldots\ldots a_1$

$a_1 = 30 \cdot \dfrac{100}{120}$

$a_1 = 25$

$d = 30 - 25 = 5$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{10} = 25 + (10-1) \cdot 5$

$a_{10} = 70$

b_n: geometrická posloupnost

$b_2 = 30$

$100\ \% + 20\ \% = 120\ \% = 1{,}2$

$q = 1{,}2$

$b_2 = b_1 \cdot q$

$30 = b_1 \cdot 1{,}2$

$b_1 = 30 : 1{,}2 = 25$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_4 = 25 \cdot 1{,}2^{4-1}$

$b_4 = 43{,}2$

$b_4 : a_{10} = 43{,}2 : 70 = 108 : 175 \longrightarrow$ možnost C)

6.2 $a_k > 200$

$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$

$a_k = 25 + (k-1) \cdot 5$

$a_k = 25 + 5k - 5$

$a_k = 20 + 5k$

$20 + 5k > 200$

$5k > 180$

$k > 36 \quad \rightarrow \quad a_{37} > 200 \quad \rightarrow \quad k = 37$

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se ke každému z čísel přičítá 20 % z velikosti prvního členu – tedy stále stejné číslo. Jde tedy o aritmetickou posloupnost.

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se ke každému z čísel přičítá 20 % z velikosti předcházejícího členu – počítáme tedy 120 % z předcházejícího členu, tedy 1,2násobek předcházejícího členu. Jde tedy o geometrickou posloupnost.

Ze zadání víme druhý člen a diferenci, resp. kvocient posloupnosti. Můžeme tedy vzorcem (nebo definicí dané posloupnosti) vypočítat první člen.

Vypočítáme si členy b_4 a a_{10}, sestavíme poměr dle zadání a zkrátíme jej.

Pomocí vzorce pro n-tý člen si vyjádříme člen a_k, sestavíme nerovnici dle zadání úkolu 6.2 a dopočítáme k. Určíme nejmenší přirozené číslo k, které vyhovuje nerovnici.

Zápisy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ představují zadání posloupností a a b.

6.1 Musíme dát pozor na pořadí členů v poměru!

6.2 Musíme dát pozor na určení čísla k. Jde o přirozené číslo (pořadové číslo členu posloupnosti), pro které platí $k > 36$. Jde tedy o číslo 37. Je třeba rozlišovat mezi a_k (člen posloupnosti) a k (jeho pořadové číslo).

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Posloupnost je určena vzorcem pro n-tý člen: $a_n = \dfrac{n^2 - 3n}{5}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1 **Z následujících tvrzení vyberte to, které je nepravdivé.**

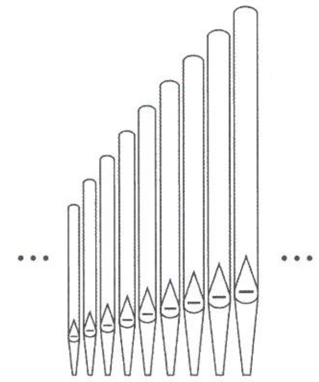
A) $a_5 = 2$.
B) Hodnoty prvních tří členů posloupnosti jsou $-\dfrac{2}{5}; -\dfrac{2}{5}; 0$.
C) Posloupnost není aritmetická.
D) Posloupnost je geometrická.
E) $a_3 + a_4 = \dfrac{4}{5}$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 2

„Zdrojem zvuku u varhan jsou píšťaly. Prouděním vzduchu skrz ně vzniká zvuk. Délka píšťaly rozhoduje o frekvenci zvuku; čím je píšťala delší, tím hlubší tón vydává. Píšťaly jsou seřazeny do řad (rejstříků). Každý rejstřík sestává z píšťal různé délky."

(zdroj: Wikipedie)

Píšťaly jednoho rejstříku jsou uspořádány podle velikosti. Rozdíl délek dvou sousedících píšťal je vždy stejný. Pátá píšťala má délku 0,52 m a třináctá píšťala má délku 1,16 m.



2 **Jakou délku má devatenáctá píšťala?**

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

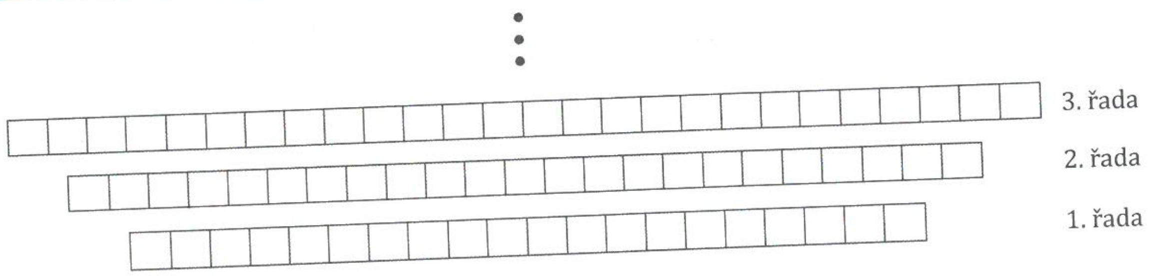
V aritmetické posloupnosti platí: $a_1 = 7$, $a_3 + a_9 = 9$.

3 **Určete diferenci této aritmetické posloupnosti.**

4 **Určete součet všech sudých dvojciferných čísel dělitelných třemi.**

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Tribuna má v první řadě 20 sedadel a v každé další řadě o 3 sedadla více než v řadě předchozí.



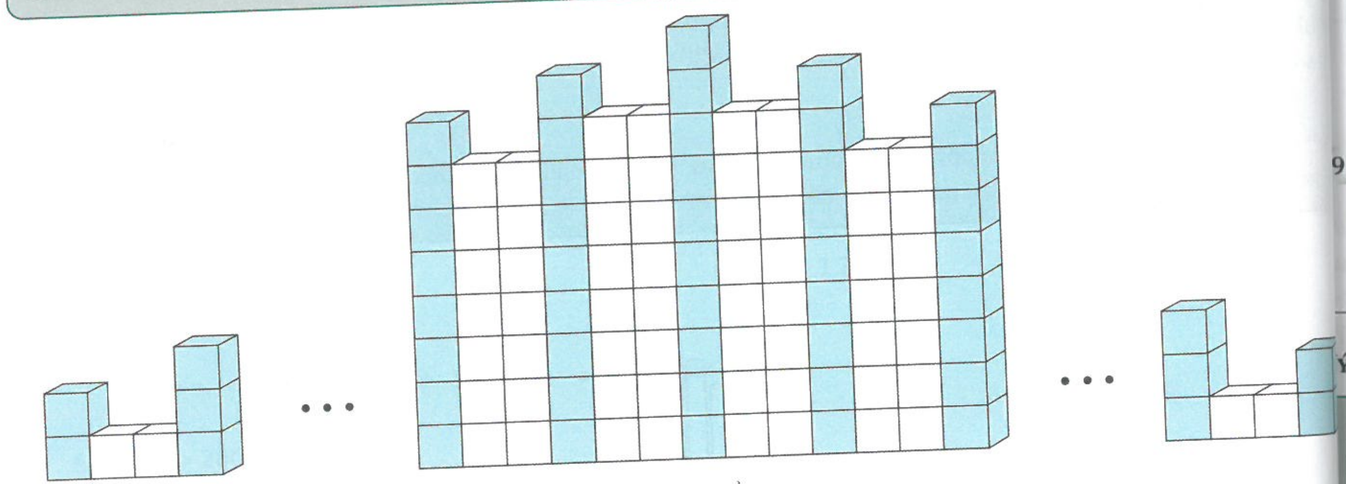
5

5.1 Kolik sedadel je v 9. řadě?

5.2 Kolik řad je v tribuně, jestliže se na ni vejde 335 diváků?

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Z dřevěných kostek dvou různých barev postavily děti hrad podle obrázku. Počty kostek v modrých a bílých sloupcích se od středu do stran pravidelně snižují. Po obou stranách je hrad ukončen sloupcem dvou modrých kostek.



6 Přiřaďte ke každé úloze (6.1–6.2) výsledek (A–E).

6.1 Kolik modrých kostek děti na stavbu použily? ....

6.2 Kolik bílých kostek děti na stavbu použily? ....

A) méně než 98
B) 98
C) 108
D) 140
E) více než 140

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Na koupi nového auta si Markéta půjčila od banky 400 000 korun s tím, že dlužnou částku splatí jednorázově po p... letech. Banka úvěr úročí vždy na konci roku úrokovou mírou 8 % a jedná se o složené úročení. Po třech letech se... Markéta rozhodla tento úvěr refinancovat výhodnějším úvěrem jiné banky. Tato výhodná nabídka se ale váže po... na dlužné částky do půl miliónu korun.

7 Rozhodněte, zda je následující tvrzení pravdivé (A), či nikoli (N).

Půl miliónu korun bude stačit na refinancování dlužné částky po třech letech původního úvěru. A ☐ N ☐

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

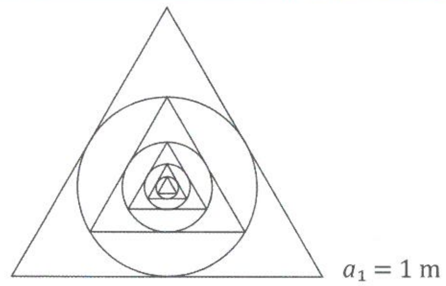
V geometrické posloupnosti platí: $a_3 = \frac{2}{9}$, $a_5 = \frac{8}{81}$ a q je větší než 0.

8 Rozhodněte u každého z následujících tvrzení (8.1–8.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
8.1	Kvocient posloupnosti je $\frac{4}{9}$.	☐	☐
8.2	$a_4 = \frac{4}{27}$.	☐	☐
8.3	$a_3 + a_4 + a_5 = \frac{38}{81}$.	☐	☐
8.4	$a_1 = 1$.	☐	☐

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Ornament je složen ze vzájemně do sebe vepsaných rovnostranných trojúhelníků a kružnic. Největší rovnostranný trojúhelník má stranu $a_1 = 1$ m.



9

9.1 Určete obvod čtvrtého největšího trojúhelníku. Uveďte celý postup řešení.

9.2 Kolikátý trojúhelník má obsah $S_n = \frac{\sqrt{3}}{32}$ m²?

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

Na začátku roku vložil Karel na spořící účet jednorázově částku 40 000 Kč. Banka připisuje úroky jednou ročně, vždy na konci roku. První tři roky byla roční úroková míra 2 %, od čtvrtého roku ale banka úrok snížila na 1,3 %. Daň z úroku je 15 %. Jedná se o složené úročení.

10 Určete, jakou částku (zaokrouhlenou na stokoruny) banka Karlovi vyplatí po pěti letech spoření.

A) 42 000 Kč
B) 43 000 Kč
C) 43 600 Kč
D) 44 000 Kč
E) 44 200 Kč

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Pan podnikatel Novotný si chce od banky půjčit 1,5 miliónu korun na deset let. Předpokládá, že po této době bude mít na jednorázové splacení úvěru částku 2,5 miliónu korun. Banka úročí úvěr na konce každého roku úrokovou mírou 5,5 %. Jedná se o složené úročení.

11

11.1 Určete, na jakou částku vzroste dluh pana Novotného po deseti letech a zaokrouhlete ji na tisíce.

11.2 Jakou roční úrokovou míru by musela banka nabízet, aby za jinak stejných podmínek stačilo panu Novotnému na splacení dluhu 2,5 milionu korun? Úrokovou míru zaokrouhlete na desetiny procenta.