CVIČNÝ TEST 21

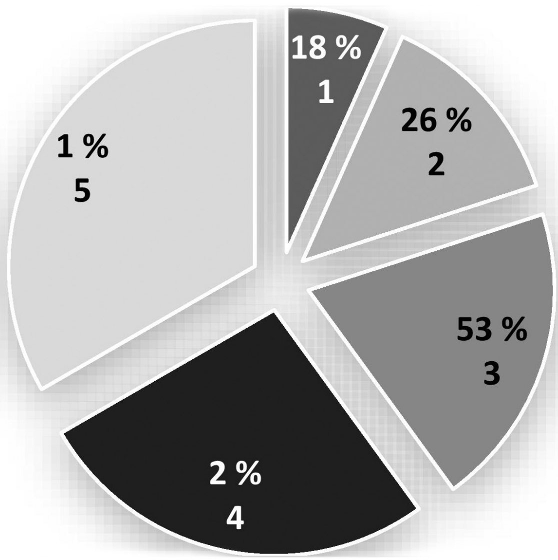
Mgr. Tomáš Kotler

OBSAH

I. CVIČNÝ TEST

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

Letošní pololetní výsledné známky z dějepisu zobrazuje níže uvedený kruhový diagram.



1 bod

1 Určete průměrnou známku z dějepisu (výslednou známku zaokrouhlete na dvě desetinná místa).

1 bod

2 Určete všechny průsečíky grafu funkce f: $y = 2 \cdot 2^{3-x} - 4$ se souřadnicovou osou x.

1 bod

3 K nejmenšímu kladnému prvočíslu přičtěte jeho převrácenou hodnotu a zároveň odečtěte od tohoto prvočísla jeho opačnou hodnotu. K výsledku pak přičtěte převrácenou hodnotu tohoto výsledku. Jakého čísla jste dosáhli? (Výsledek vyjádřete ve zlomku v základním tvaru.)

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Jsou dány vektory $\vec{u} = (m - 1; 4)$ a $\vec{v} = (m + 3; -2m - 1)$, kde $m \in \mathrm{R}$.

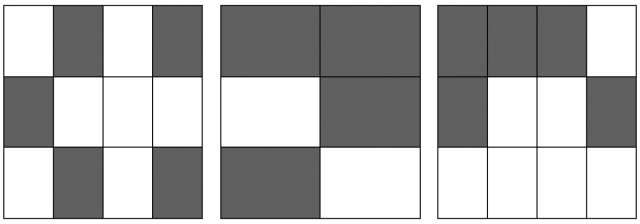
max. 2 body

4.1 Určete všechna kladná reálná čísla m tak, aby vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ byly na sebe kolmé.

4.2 Určete m takové, aby platilo $A = B + \vec{v}$, kde $A[1; -4]$, $B[-4; 1]$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Je dána krychle o hraně délky x, kde $x > 0$. Krychle byla rozřezána na 24 kvádrů a některé z nich byly obarveny na šedo. Obrázek ukazuje pohled na krychli zepředu, z boku a zezadu.



max. 2 body

5.1 Kolik kvádrů bylo obarveno na šedo?

5.2 Jaký je celkový objem všech zabarvených kvádrů dohromady, bude-li $x = 6$ cm?

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Je dána rovnice $\sqrt{\dfrac{4-x}{x+1}} = 2$.

max. 3 body

6.1 Jaký je definiční obor rovnice? (V záznamovém listu uveďte celý postup řešení.)

6.2 Pro přípustné hodnoty tuto rovnici vyřešte.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Pro $x \in \mathrm{N}$ je dán výraz $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$.

2 body

7 Která z možností představuje přesnou hodnotu tohoto výrazu pro $x = 5$?

A) $\dfrac{4}{3}$

B) $1\dfrac{1}{5}$

C) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

D) $1\dfrac{3}{2}$

E) $\sqrt{5} - 1$

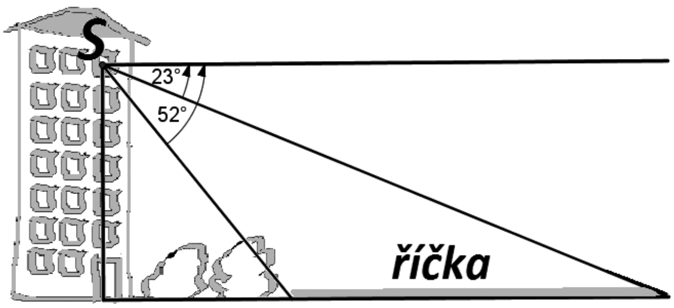
2 body

8 Je dána kvadratická rovnice $x^2 + ax - a = 0$ s neznámou x a reálným parametrem a. Která z množin zobrazuje právě všechny takové hodnoty parametru a, pro které má rovnice právě dva různé reálné kořeny?

A) $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$
B) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$
C) $x \in (-4; -2)$
D) $x \in (-4; 0)$
E) $x \in \langle -2; 0 \rangle$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Ze stanoviště v posledním patře panelového domu na okraji města je měřena šířka říčky, která poblíž domu protéká. Při měření v rovině kolmé na tok říčky byly břehy říčky vidět v hloubkových úhlech 52° a 23°. Na obrázku je stanoviště, z něhož byla šířka říčky měřena, označeno písmenem S a nachází se 25 m vysoko nad rovinným terénem.



max. 2 body

9 Rozhodněte o každém tvrzení (9.1–9.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE):

		ANO	NE
9.1	Zorný úhel, pod kterým je ze stanoviště S vidět říčka, je 75°.	☐	☐
9.2	Ze vzdálenějšího břehu říčky je stanoviště S vidět pod výškovým úhlem 30°.	☐	☐
9.3	Bližší z břehů říčky je ze stanoviště vzdálen vzdušnou čarou méně jak 32 metrů.	☐	☐
9.4	Naměřená šířka řeky je delší jak 40 m.	☐	☐

max. 4 body

10 Přiřaďte každé z posloupností (10.1–10.4) její člen (A–F).

10.1 aritmetická posloupnost, v níž $a_1 = -4$; $d = 2$

10.2 aritmetická posloupnost, v níž $a_{11} = -4$; $d = \frac{1}{2}$

10.3 geometrická posloupnost, v níž $a_3 = -4$; $a_7 = -4$

10.4 geometrická posloupnost, v níž $a_7 = 64$; $a_{10} = 8$

A) $a_5 = 4$

B) $a_7 = 4$

C) $a_8 = 4$

D) $a_9 = 4$

E) $a_{11} = 4$

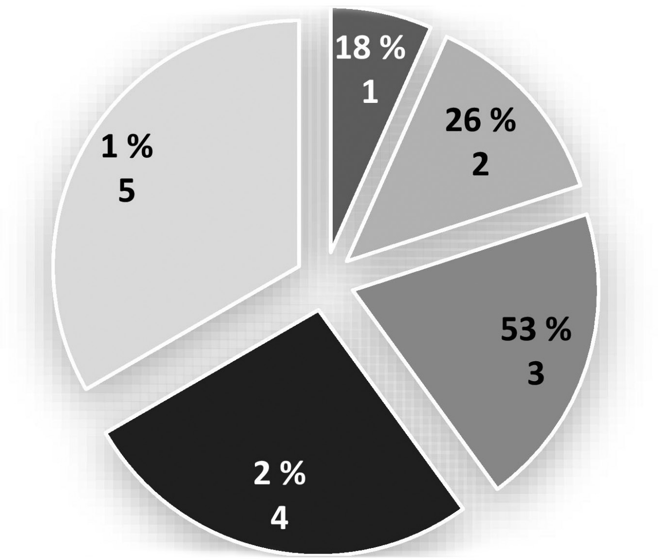
F) $a_{27} = 4$

KONEC TESTU

II. AUTORSKÉ ŘEŠENÍ

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

Letošní pololetní výsledné známky z dějepisu zobrazuje níže uvedený kruhový diagram.



1 bod

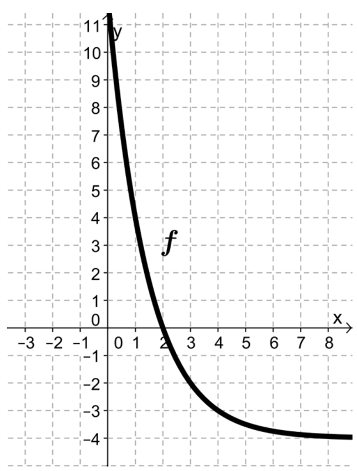
1 Určete průměrnou známku z dějepisu (výslednou známku zaokrouhlete na dvě desetinná místa).

Průměrnou známku z dějepisu vypočteme tak, že provedeme tzv. vážený průměr.
$0{,}18 \cdot 1 + 0{,}26 \cdot 2 + 0{,}53 \cdot 3 + 0{,}02 \cdot 4 + 0{,}01 \cdot 5 = 2{,}42$
Průměrná známka z dějepisu je 2,42.

Řešení: 2,42

1 bod

2 Určete všechny průsečíky grafu funkce f: $y = 2 \cdot 2^{3-x} - 4$ se souřadnicovou osou x.



Zakreslíme-li graf funkce f do soustavy souřadnic, uvidíme, že průsečíkem grafu funkce f se souřadnicovou osou x je bod [2; 0].

Závěr lze učinit i řešení rovnice $f(x) = 0$:
$2 \cdot 2^{3-x} - 4 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^{3-x} = 4 \Rightarrow 2^{1+3-x} = 2^2 \Rightarrow 1 + 3 - x = 2 \Rightarrow$
$4 - x = 2 \Rightarrow x = 2$

Řešení: [2; 0]

1 bod

3 K nejmenšímu kladnému prvočíslu přičtěte jeho převrácenou hodnotu a zároveň odečtěte od tohoto prvočísla jeho opačnou hodnotu. K výsledku pak přičtěte převrácenou hodnotu tohoto výsledku. Jakého čísla jste dosáhli? (Výsledek vyjádřete ve zlomku v základním tvaru.)

Nejmenším kladným prvočíslem je číslo 2.

$$2+\frac{1}{2}-(-2)+\frac{1}{2+\frac{1}{2}-(-2)}=\frac{9}{2}+\frac{2}{9}=\frac{85}{18}$$

Řešení: $\mathbf{\frac{85}{18}}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Jsou dány vektory $\vec{u}=(m-1;4)$ a $\vec{v}=(m+3;-2m-1)$, kde $m \in \mathrm{R}$.

max. 2 body

4.1 Určete všechna kladná reálná čísla *m* tak, aby vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ byly na sebe kolmé.

Vektory jsou na sebe kolmé právě tehdy, když jejich skalární součin je roven 0.
$\vec{u}\cdot\vec{v}=(m-1)\cdot(m+3)+4\cdot(-2m-1)=m^2-6m-7=0=(m-7)(m+1)\Rightarrow m=-1<0 \vee m=7$

Řešení: $m = 7$

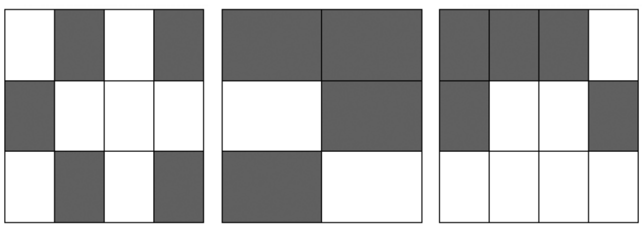
4.2 Určete *m* takové, aby platilo $A = B + \vec{v}$, kde $A[1;-4]$, $B[-4;1]$.

Číslo m určíme dosazením do vztahu $A=B+\vec{v}$, kde $A[1;-4]$, $B[-4;1]$.
$[1;-4]=[-4;1]+\vec{v}$
$\vec{v}=(1-(-4);-4-1)=(5;-5)\Rightarrow(5;-5)=(m+3;-2m-1)\Rightarrow m+3=5 \wedge -2m-1=-5$
Řešením obou rovnic je číslo $m = 2$.

Řešení: $m = 2$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Je dána krychle o hraně délky x, kde $x > 0$. Krychle byla rozřezána na 24 kvádrů a některé z nich byly obarveny na šedo. Obrázek ukazuje pohled na krychli zepředu, z boku a zezadu.

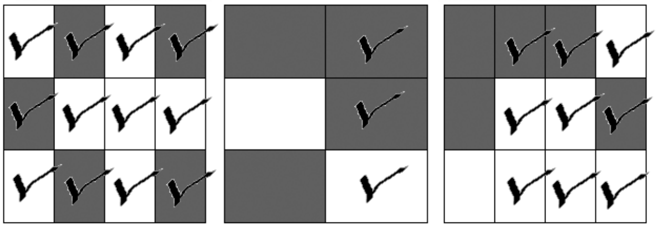


zepředu **z boku** **zezadu**

max. 2 body

5.1 Kolik kvádrů bylo obarveno na šedo?

Podle obrázku zjistíme, že můžeme rozhodnout o barvě všech 24 kvádrů , které níže v obrázku označujeme odškrtnutím ✓. Rovněž je viditelné, že obarveno na šedo bylo právě 10 kvádrů.



Řešení: 10

5.2 Jaký je celkový objem všech zabarvených kvádrů dohromady, bude-li $x = 6$ cm?

Objem zabarvených kvádrů vypočteme takto:

$V = 10 \cdot \frac{x^3}{24} = 10 \cdot \frac{216\ \text{cm}^3}{24} = 90\ \text{cm}^3$

Zabarvené kvádry mají v součtu objem 90 cm^3.

Řešení: 90 cm^3

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Je dána rovnice $\sqrt{\frac{4-x}{x+1}} = 2.$

max. 3 body

6.1 Jaký je definiční obor rovnice? (V záznamovém listu uveďte celý postup řešení.)

Z výrazu na levé straně rovnice stanovíme podmínky:

$\frac{4-x}{x+1} \geq 0 \wedge x \neq -1$

	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 4\rangle$	$x \in \langle 4, +\infty)$
$4 - x$	+	+	−
$x + 1$	−	+	+
$\frac{4-x}{x+1}$	−	+	−

Definičním oborem jsou $x \in (-1, 4\rangle$.

Řešení: $x \in (-1, 4\rangle$

6.2 Pro přípustné hodnoty tuto rovnici vyřešte.

Rovnici pro přípustné hodnoty dořešíme:

$\sqrt{\dfrac{4-x}{x+1}} = 2 \quad /^2$

$\dfrac{4-x}{x+1} = 4 \quad / \cdot (x+1);\ x \neq -1$

$4 - x = 4x + 4$

$x = 0$

Řešení ověříme zkouškou:

$L = \sqrt{\dfrac{4-0}{0+1}} = \sqrt{\dfrac{4}{1}} = \sqrt{4} = 2 = P$

Řešením je $x = 0$.

Řešení: $x = 0$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Pro $x \in \mathrm{N}$ je dán výraz $\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$.

2 body

7 Která z možností představuje přesnou hodnotu tohoto výrazu pro $x = 5$?

A) $\dfrac{4}{3}$

B) $1\dfrac{1}{5}$

C) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

D) $1\dfrac{3}{2}$

E) $\sqrt{5} - 1$

Do výrazu dosadíme $x = 5$ a zlomek usměrníme.

$\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+2} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 6}{5-4} = \sqrt{5} - 1$

Přesnou hodnotou výrazu pro $x = 5$ je $\sqrt{5} - 1$, tedy možnost E.

Řešení: E

2 body

8 Je dána kvadratická rovnice $x^2 + ax - a = 0$ s neznámou x a reálným parametrem a. Která z množin zobrazuje právě všechny takové hodnoty parametru a, pro které má rovnice právě dva různé reálné kořeny?

A) $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$
B) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$
C) $x \in (-4; -2)$
D) $x \in (-4; 0)$
E) $x \in \langle -2; 0 \rangle$

Rovnice $x^2 + ax - a = 0$ má právě dva různé reálné kořeny jen tehdy, když diskriminant
$D = a^2 - 4(-a) = a^2 + 4a > 0$.
Hledáme tedy takové hodnoty parametru a, pro které platí:
$a^2 + 4a > 0$
$a(a + 4) > 0$

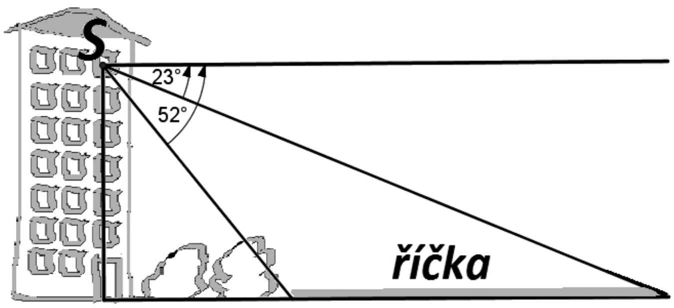
	$a \in (-\infty, -4)$	$a \in (-4, 0)$	$a \in (0, +\infty)$
$a + 4$	–	+	+
a	–	–	+
$a(a + 4)$	+	–	+

Řešením jsou všechna $a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Řešení: A

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Ze stanoviště v posledním patře panelového domu na okraji města je měřena šířka říčky, která poblíž domu protéká. Při měření v rovině kolmé na tok říčky byly břehy říčky vidět v hloubkových úhlech 52° a 23°. Na obrázku je stanoviště, z něhož byla šířka říčky měřena, označeno písmenem *S* a nachází se 25 m vysoko nad rovinným terénem.



max. 2 body

9 Rozhodněte o každém tvrzení (9.1–9.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE):

		ANO	NE
9.1	Zorný úhel, pod kterým je ze stanoviště *S* vidět říčka, je 75°.	☐	☐
9.2	Ze vzdálenějšího břehu říčky je stanoviště *S* vidět pod výškovým úhlem 30°.	☐	☐

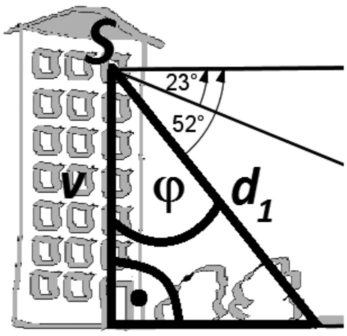
9.3 Bližší z břehů říčky je ze stanoviště vzdálen vzdušnou čarou méně jak 32 metrů. ☐ ☐

9.4 Naměřená šířka řeky je delší jak 40 m. ☐ ☐

9.1
Říčka je vidět pod zorným úhlem, který vznikne jako rozdíl většího a menšího z hloubkových úhlů. Protože 52°– 23° = 29° a nikoliv 75°, tvrzení je nepravdivé.

9.2
Výškový úhel, pod kterým je vidět ze vzdálenějšího břehu stanoviště *S* je roven hloubkovému úhlu, pod kterým je vidět ze stanoviště *S* vzdálenější břeh, tedy 23°.
Tvrzení je nepravdivé.

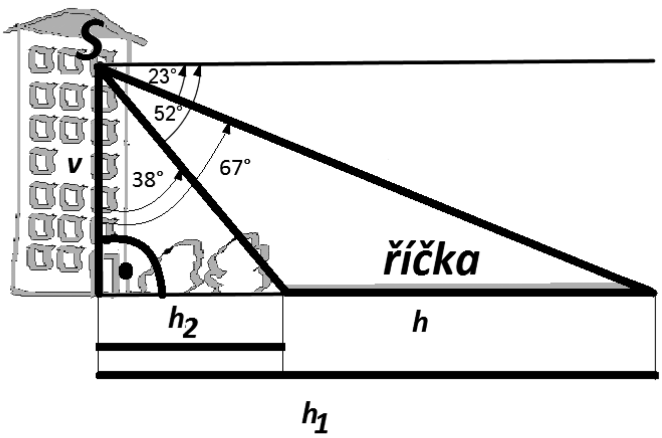
9.3
Vzdálenost d_1 stanoviště *S* a bližšího z břehů říčky vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka, jestliže víme: $v = 25$ m, $\varphi = 90° - 52° = 38°$.



$$\cos\varphi = \frac{v}{d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{v}{\cos\varphi} \Rightarrow d_1 = \frac{25\ \text{m}}{\cos 38°} \doteq 31{,}73\ \text{m} < 32\ \text{m}$$

Tvrzení je pravdivé.

9.4
Šířku říčky *h* vypočteme rozdílem vzdáleností $h_1 - h_2$. Obě vzdálenosti vypočteme z pravoúhlých trojúhelníků.
$h_1 = (25\ \text{m}) \cdot \text{tg}\ 67°$; $h_2 = (25\ \text{m}) \cdot \text{tg}\ 38°$
$h = (25\ \text{m}) \cdot (\text{tg}\ 67° - \text{tg}\ 38°) \doteq 39{,}36\ \text{m} < 40\ \text{m}$



Tvrzení je nepravdivé.

Řešení: NE, NE, ANO, NE

B 21

max. 4 body

10 Přiřaďte každé z posloupností (10.1–10.4) její člen (A–F).

10.1 aritmetická posloupnost, v níž $a_1 = -4$; $d = 2$

10.2 aritmetická posloupnost, v níž $a_{11} = -4$; $d = \frac{1}{2}$

10.3 geometrická posloupnost, v níž $a_3 = -4$; $a_7 = -4$

10.4 geometrická posloupnost, v níž $a_7 = 64$; $a_{10} = 8$

A) $a_5 = 4$
B) $a_7 = 4$
C) $a_8 = 4$
D) $a_9 = 4$
E) $a_{11} = 4$
F) $a_{27} = 4$

10. 1

$a_1 = -4; d = 2 \Rightarrow 4 = -4 + (n-1)\cdot 2 \Rightarrow 8 = 2n - 2 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow a_5 = 4$

Řešení: A

10.2

$a_{11} = -4; d = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 = -4 + (n-11)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 8 = -8 + n - 11 \Rightarrow n = 27 \Rightarrow a_{27} = 4$

Řešení: F

10.3

$a_3 = -4; a_7 = -4 \Rightarrow -4 = -4 \cdot q^{7-3} \Rightarrow q^4 = 1 \Rightarrow q_1 = 1 \lor q_2 = -1 \Rightarrow$

Pro $q_1 = 1$:
V tomto případě by šlo o konstantní posloupnost, v níž se všechny členy rovnají –4, žádný člen se proto nemůže rovnat 4.

Pro $q_2 = -1$:
$4 = -4 \cdot (-1)^{n-3} \Rightarrow (-1)^{n-3} = -1 \Rightarrow n - 3 = k$, kde k je liché přirozené číslo $\Rightarrow n = 3 + k$ každý sudý člen této posloupnosti je roven 4, každý lichý $-4 \Rightarrow a_8 = 4$

Řešení: C

10.4

$a_7 = 64; a_{10} = 8 \Rightarrow 8 = 64 \cdot q^{10-7} \Rightarrow \frac{1}{8} = q^3 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} \Rightarrow$

$\frac{4}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-7} \Rightarrow 4 = n - 7 \Rightarrow n = 11 \Rightarrow a_{11} = 4$

Řešení: E

KONEC TESTU

III. KLÍČ

1) Maximální bodové ohodnocení je 20 bodů. Hranice úspěšnosti v testu je 7 bodů.
2) Úlohy 1–6 jsou otevřené.
3) Úlohy 7–10 jsou uzavřené s nabídkou možných odpovědí, kde u každé úlohy resp. podúlohy je právě jedna odpověď správná.

Tabulka úspěšnosti	
Počet bodů	Výsledná známka
20–17	výborně
16–14	chvalitebně
13–11	dobře
10–7	dostatečně
6 a méně	nedostatečně

Úloha	Správné řešení	Počet bodů
1	**2,42**	1 bod
2	**[2; 0]**	1 bod
3	$\mathbf{\frac{85}{18}}$	1 bod
4		
4.1	$\boldsymbol{m = 7}$	1 bod
4.2	$\boldsymbol{m = 2}$	1 bod
5		
5.1	**10**	1 bod
5.2	**90 cm^3**	1 bod
6		1 bod
6.1	**Z výrazu na levé straně rovnice stanovíme podmínky:** $\frac{4-x}{x+1} \geq 0 \wedge x \neq -1$	2 body

	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 4\rangle$	$x \in \langle 4, +\infty)$
$4-x$	+	+	–
$x+1$	–	+	+
$\frac{4-x}{x+1}$	–	+	–

Definičním oborem jsou $x \in (-1, 4\rangle$.

Řešení: $x \in (-1, 4\rangle$

B 21

6.2		1 bod
7	**E**	2 body
8	**A**	2 body
9		max. 2 body 4 podúlohy 2 b. 3 podúlohy 1 b. 2 podúlohy 0 b. 1 podúloha 0 b. 0 podúloh 0 b.
9.1	**NE**	
9.2	**NE**	
9.3	**ANO**	
9.4	**NE**	
10		max. 4 body 4 podúlohy 4 b. 3 podúlohy 3 b. 2 podúlohy 2 b. 1 podúloha 1 b. 0 podúloh 0 b.
10.1	**A**	
10.2	**F**	
10.3	**C**	
10.4	**E**	

IV. ZÁZNAMOVÝ LIST

1) Maximální bodové ohodnocení je 20 bodů. Hranice úspěšnosti v testu je 7 bodů.
2) Úlohy 1–6 jsou otevřené. **Zapište výsledek. V úloze 6.1 uveďte i celý postup řešení.**
3) Úlohy 7–10 jsou uzavřené s nabídkou možných odpovědí, kde u každé úlohy resp. podúlohy je právě jedna odpověď správná. **Zapište vybranou možnost.**

Tabulka úspěšnosti	
Počet bodů	Výsledná známka
20–17	výborně
16–14	chvalitebně
13–11	dobře
10–7	dostatečně
6 a méně	nedostatečně

Úloha	Správné řešení	Počet bodů
1		1 bod
2		1 bod
3		1 bod
4		
4.1		1 bod
4.2		1 bod
5		
5.1		1 bod
5.2		1 bod
6		1 bod
6.1		2 body

6.2		1 bod
7		2 body
8		2 body
9		max. 2 body 4 podúlohy 2 b. 3 podúlohy 1 b. 2 podúlohy 0 b. 1 podúloha 0 b. 0 podúloh 0 b.
9.1		
9.2		
9.3		
9.4		
10		max. 4 body 4 podúlohy 4 b. 3 podúlohy 3 b. 2 podúlohy 2 b. 1 podúloha 1 b. 0 podúloh 0 b.
10.1		
10.2		
10.3		
10.4		