CVIČNÝ TEST 28

Mgr. Kateřina Nováková

OBSAH

I. CVIČNÝ TEST

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Jsou dány body $A[4; -3]$, $B[6; 1]$ a přímka $p: x - y = 0$.

max. 3 body

1.1 Napište obecnou rovnici osy *o* úsečky *AB*.

1.2 Na přímce *p* najděte bod *C* tak, aby se zadanými body *A*, *B* tvořil rovnoramenný trojúhelník *ABC*, jehož základnou je úsečka *AB*.

max. 2 body

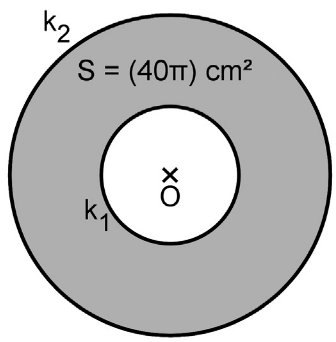
2 Vypočítejte: $\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{18} =$
V záznamovém listu uveďte celý postup řešení.

1 bod

3 Porovnejte podle velikosti čísla $A = 199! + 200!$ a $B = 198! + 201!$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1 $(O; r_1 = 3\text{ cm})$ a k_2 $(O; r_2)$, přičemž $r_2 > r_1$. Mezikruží, které kružnice k_1, k_2 vymezují, má obsah $S = (40\pi)\text{ cm}^2$. Délky kružnic k_1, k_2 označme postupně l_1, l_2. Kružnice k vznikne tak, že její délka l je součtem délek l_1, l_2 kružnic k_1, k_2, tj. $l = l_1 + l_2$.

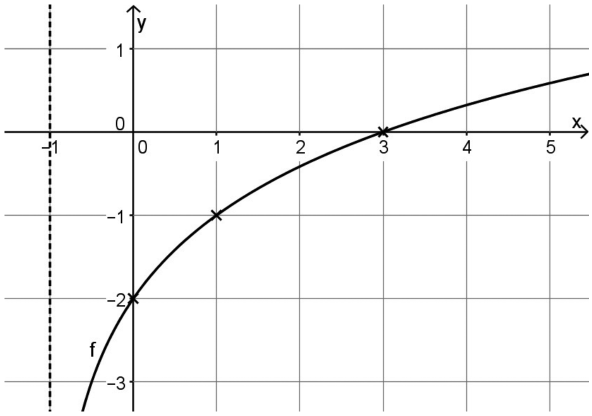


max. 2 body

4 Určete průměr *d* kružnice *k*.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Je dána logaritmická funkce f: $y = \log_z(x - m) + n$.



1 bod

5 Určete chybějící reálné koeficienty z, m a n, přičemž $z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

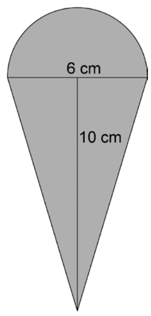
Jsou dána záporná reálná čísla a, b, c přičemž platí: $a < b < c$.

1 bod

6 Určete, zda je reálné číslo D, kde: $D = |b - c| + |c + a| - |b - a|$, kladné či záporné.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V cukrárně točí zmrzlinu do kornoutu tvaru pláště rotačního kuželu o průměru 6 cm a výšce 10 cm, přičemž zcela zaplní celý kornout, a na vrchu nad ním navíc vytvoří ještě kopeček tvaru polokoule o stejném průměru, jaký má rotační kužel.



2 body

7 Kolik celých ml takto natočené zmrzliny tvoří jedna porce? Tloušťku kornoutu zanedbejte.

A) 44 ml
B) 125 ml
C) 151 ml
D) 207 ml
E) jiný objem

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Silvie uložila počátkem roku 2010 u banky 200 000 Kč na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 1,5 %. Silvie bude mít peníze uložené v bance po dobu tří let. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Daň z úroku je 15 %. Zdaněné úroky banka nepřipisuje ke vkladu, ale na konci každého roku je posílá Silvii na její běžný účet.

max. 2 body

8 Rozhodněte o každém tvrzení (8.1–8.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE):

		ANO	NE
8.1	Roční úrok před zdaněním činil 3 500 Kč.	☐	☐
8.2	Za celé tři roky bylo na daních zaplaceno 1 350 Kč.	☐	☐
8.3	Na konci roku 2010 připsala banka Silvii na běžný účet 2 550 Kč.	☐	☐
8.4	Na běžný účet banka Silvii za celé tři roky připsala 9 000 Kč.	☐	☐

max. 4 body

9 Přiřaďte každé z kvadratických funkcí *f* (9.1–9.4) jeden z oborů hodnot H_f (A–F).

9.1 $y = (3 - x)^2$

9.2 $y = \frac{1}{4}(2 - x)(2 + x)$

9.3 $y = 1 + 5(x + 2)^2$

9.4 $y = -(3x^2 + 1)$

A) $(-\infty; -1\rangle$
B) $(-\infty; 0\rangle$
C) $(-\infty; 1\rangle$
D) $\langle -1; \infty)$
E) $\langle 0; \infty)$
F) $\langle 1; \infty)$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

Přijímací test z matematiky má 30 úloh. Za správně vyřešenou úlohu získá uchazeč 3 body, za nesprávně vyřešený příklad mu bude 1 bod odečten, za neřešenou úlohu se body ani nepřidělují, ani neodečítají.

2 body

10 Uchazeč, který čtyři úlohy nechal nevyřešené, dosáhl padesátibodového zisku. Kolik úloh vyřešil nesprávně?

A) 7
B) 8
C) 18
D) 19
E) jiný počet úloh

KONEC TESTU

II. AUTORSKÉ ŘEŠENÍ

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

Jsou dány body $A[4; -3]$, $B[6; 1]$ a přímka $p: x - y = 0$.

max. 3 body

1.1 Napište obecnou rovnici osy *o* úsečky *AB*.

Osa úsečky AB je přímka o, která prochází středem úsečky AB a je na přímku AB kolmá.

Středem úsečky AB je bod $S = \left[\frac{4+6}{2}; \frac{-3+1}{2}\right] = [5; -1]$.

Pro směrový vektor úsečky AB platí: $\vec{u}_{AB} = \overrightarrow{AB} = B - A = (6 - 4; 1 - (-3)) = (2; 4) \sim (1; 2)$.

Protože osa úsečky AB je na úsečku AB kolmá, platí pro jejich vektory: $\vec{n}_o = \vec{u}_{AB} = (1; 2)$.

Jestliže je normálový vektor: $\vec{n} = (a; b)$, má obecná rovnice přímky tvar: $ax + by + c = 0$, proto $o: x + 2y + c = 0$.

Parametr c zjistíme dosazením souřadnic bodu S do obecné rovnice přímky o: $5 + 2 \cdot (-1) + c = 0 \Longrightarrow c = -3$.

Dosazením parametru c získáme obecnou rovnici osy úsečky $o: x + 2y - 3 = 0$.

Řešení: $o: x + 2y - 3 = 0$

B 28

1.2 Na přímce *p* najděte bod *C* tak, aby se zadanými body *A*, *B* tvořil rovnoramenný trojúhelník *ABC*, jehož základnou je úsečka *AB*.

O bodu C víme, že leží na přímce p, a protože je vrcholem rovnoramenného trojúhelníku ABC, jehož základnou je úsečka AB, leží rovněž na ose o.

Bod C určíme jako průsečík přímek $p: x - y = 0$ a $o: x + 2y - 3 = 0$, budeme tedy řešit soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými. Jejich řešením je bod $C[1; 1]$.

Alternativa:

Nechceme-li nebo nemůžeme-li použít znalosti z předchozího cvičení, pak pro souřadnice bodu C, který leží na přímce $p: x - y = 0$, platí: $y = x$, tj. $C[x; x]$.

Je-li bod C vrcholem rovnoramenného trojúhelníku ABC, jehož základnou je úsečka AB, pak úsečky AC, BC jsou ramena, a proto platí: $|AC| = |BC|$.

Použijeme vzorec pro velikost úsečky:

$|AC| = \sqrt{(x-4)^2 + (x+3)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x^2 + 6x + 9} = \sqrt{2x^2 - 2x + 25}$,

$|BC| = \sqrt{(x-6)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 14x + 37}$.

Umocněním a následnými úpravami vyřešíme rovnici: $\sqrt{2x^2 - 2x + 25} = \sqrt{2x^2 - 14x + 37}$, čímž získáme $x = 1$, tedy i $y = 1$, a bod C má souřadnice $[1; 1]$.

Řešení: $C[1; 1]$

max. 2 body

2 Vypočítejte: $\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{18} =$
V záznamovém listu uveďte celý postup řešení.

Při výpočtu užijeme pravidla pro počítání s odmocninami:
$\sqrt[r \cdot n]{x^{r \cdot m}} = \sqrt[n]{x^m}$ a $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$, kde: $m, n, r \in \mathrm{N}$, $x, y \in \mathrm{R}$.
$\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{6^2} \cdot \sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{32 \cdot 6^2 \cdot 18} = \sqrt[4]{2^5 \cdot (2 \cdot 3)^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^4} =$
$= 2^2 \cdot 3 = 12$

Řešení: 12

1 bod

3 Porovnejte podle velikosti čísla $A = 199! + 200!$ a $B = 198! + 201!$.

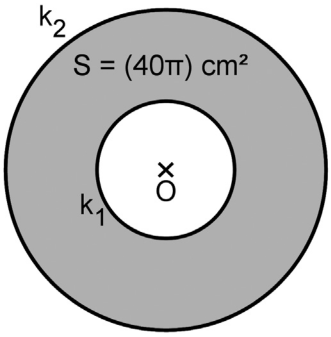
Z obou výrazů vytkneme faktoriál stejné hodnoty, a pak porovnáme jejich násobky.
$A = 199! + 200! = 198! \cdot (199 + 200 \cdot 199) = 198! \cdot 39\,999$
$\mathrm{B} = 198! + 201! = 198! \cdot (1 + 201 \cdot 200 \cdot 199) = 198! \cdot 7\,999\,801$
$39\,999 < 7\,999\,801 \Longrightarrow 198! \cdot 39\,999 < 198! \cdot 7\,999\,801 \Longrightarrow A < B$

Řešení: *A* < *B*

B 28

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1 $(O; r_1 = 3\text{ cm})$ a k_2 $(O; r_2)$, přičemž $r_2 > r_1$. Mezikruží, které kružnice k_1, k_2 vymezují, má obsah $S = (40\pi)\text{ cm}^2$. Délky kružnic k_1, k_2 označme postupně l_1, l_2. Kružnice k vznikne tak, že její délka l je součtem délek l_1, l_2 kružnic k_1, k_2, tj. $l = l_1 + l_2$.



max. 2 body

4 Určete průměr *d* kružnice *k*.

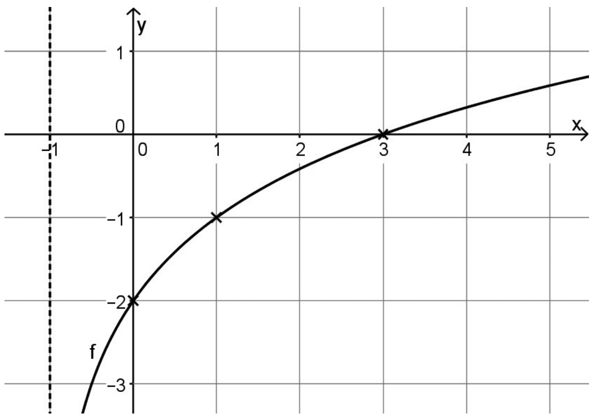
Ze vzorce pro obsah mezikruží $S = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ vypočítáme poloměr r_2 kružnice k_2: $r^2 = \sqrt{\frac{S}{\pi} + r_1^2} = \sqrt{\frac{S}{\pi} + r_1^2} = 7$ cm.
Ze vzorce pro délku kružnice $l = 2\pi r$ vypočítáme délky l_1, l_2 kružnic k_1, k_2: $l_1 = (6\pi)$ cm, $l_2 = (14\pi)$ cm.
Pro kružnici k platí: $l = l_1 + l_2 = (20\pi)$ cm.
Ze vzorce pro délku kružnice $l = 2\pi r$ vypočítáme poloměr r kružnice k: $r = \frac{l}{2\pi} = 10$ cm.
Pro průměr d kružnice k platí: $d = 2r = 20$ cm.

Alternativa:
Ze vztahu $l = l_1 + l_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 + r_2)$ lze jednoduše odvodit, že pro poloměry kružnic k, k_1, k_2 platí: $r = r_1 + r_2$.

Řešení: $d = 20$ cm

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Je dána logaritmická funkce f: $y = \log_z(x - m) + n$.



1 bod

5 Určete chybějící reálné koeficienty z, m a n, přičemž $z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Asymptotou logaritmické funkce $y = \log_z x$ je osa y, graf funkce f je posunut o 1 doleva, tj. $m = -1$.
Charakteristickým bodem logaritmické funkce $y = \log_z x$ je bod [1; 0], graf funkce f má při posunutí o 1 doleva tento bodu posunut o 2 dolů, tj. $n = -2$.
Graf funkce f prochází bodem [1; –1] a jeho dosazením do předpisu funkce f: $y = \log_z(x + 1) - 2$ dostaneme: $-1 = \log_z(1 + 1) - 2 \Longrightarrow 1 = \log_z 2 \Longrightarrow z = 2$.
Ještě provedeme kontrolu dosazením bodu [3; 0] do předpisu funkce f: $y = \log_2(x + 1) - 2$, tj. $0 = \log_2(3 + 1) - 2 \Longrightarrow 0 = \log_2 4 - 2 \Longrightarrow 0 = 2 - 2$.

Řešení: f: $y = \log_2(x + 1) - 2$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Jsou dána záporná reálná čísla a, b, c přičemž platí: $a < b < c$.

1 bod

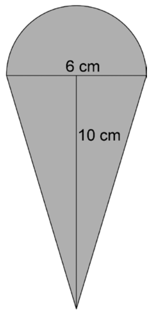
6 Určete, zda je reálné číslo D, kde: $D = |b - c| + |c + a| - |b - a|$, kladné či záporné.

Využijeme algebraický význam absolutní hodnoty: $|a| = a$ pro a $\in \langle 0; \infty)$, $|a| = -a$ pro $a \in (-\infty; 0)$.
$b < c \Longrightarrow b - c < 0 \Longrightarrow |b - c| = -(b - c) = -b + c = c - b$
$a, c \in \mathrm{R}^- \Longrightarrow c + a < 0 \Longrightarrow |c + a| = -(c + a) = -c - a$
$a < b \Longrightarrow b - a > 0 \Longrightarrow |b - a| = b - a$
$D = |b - c| + |c + a| - |b - a| = c - b + (-c - a) - (b - a) = c - b - c - a - b + a = -2b$
$b < 0 \Longrightarrow D = -2b > 0$

Řešení: kladné

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V cukrárně točí zmrzlinu do kornoutu tvaru pláště rotačního kuželu o průměru 6 cm a výšce 10 cm, přičemž zcela zaplní celý kornout, a na vrchu nad ním navíc vytvoří ještě kopeček tvaru polokoule o stejném průměru, jaký má rotační kužel.



2 body

7 Kolik celých ml takto natočené zmrzliny tvoří jedna porce? Tloušťku kornoutu zanedbejte.

A) 44 ml
B) 125 ml
C) 151 ml
D) 207 ml
E) jiný objem

Průměr rotačního kužele i polokoule je: $d = 6$ cm. Výška rotačního kužele je: $v = 10$ cm.
Poloměr rotačního kužele i polokoule je: $r = \frac{d}{2} = 3$ cm.
Objem rotačního kužele je: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 v = (30\pi)$ cm^3.
Objem polokoule je: $V_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = (18\pi)$ cm^3.
Objem jedné porce vypočteme jako součet objemu rotačního kužele a polokoule:
$V = V_1 + V_2 = (48\pi)$ cm$^3 \doteq 151$ cm^3.
Správná možnost je C.

Řešení: C

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Silvie uložila počátkem roku 2010 u banky 200 000 Kč na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 1,5 %. Silvie bude mít peníze uložené v bance po dobu tří let. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Daň z úroku je 15 %. Zdaněné úroky banka nepřipisuje ke vkladu, ale na konci každého roku je posílá Silvii na její běžný účet.

max. 2 body

8 Rozhodněte o každém tvrzení (8.1–8.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE):

		ANO	NE
8.1	Roční úrok před zdaněním činil 3 500 Kč.	☐	☐
8.2	Za celé tři roky bylo na daních zaplaceno 1 350 Kč.	☐	☐
8.3	Na konci roku 2010 připsala banka Silvii na běžný účet 2 550 Kč.	☐	☐
8.4	Na běžný účet banka Silvii za celé tři roky připsala 9 000 Kč.	☐	☐

8.1
Při roční úrokové míře 1,5 % činí úrok z 200 000 Kč: $u = \frac{1{,}5}{100} \cdot 200\,000$ Kč $= 3\,000$ Kč.
Tvrzení je nepravdivé.

8.2
Při 15% sazbě je daň z 3 000 Kč: $t = \frac{1{,}5}{100} \cdot 3\,000$ Kč $= 450$ Kč. Daň za celé tři roky tedy činí:
$3 \cdot 450$ Kč $= 1\,350$ Kč.
Tvrzení je pravdivé.

8.3
Na konci roku 2010 připsala banka Silvii na běžný účet zdaněný úrok, tj. 3 000 Kč – 450 Kč = 2 550 Kč.
Tvrzení je pravdivé.

8.4
Za celé tři roky banka připsala na Silviin účet: $3 \cdot 2\,550$ Kč=7 650 Kč.
Tvrzení je nepravdivé.

Řešení: NE, ANO, ANO, NE

max. 4 body

9 Přiřaďte každé z kvadratických funkcí *f* (9.1–9.4) jeden z oborů hodnot H_f (A–F).

9.1 $y = (3 - x)^2$

9.2 $y = \frac{1}{4}(2 - x)(2 + x)$

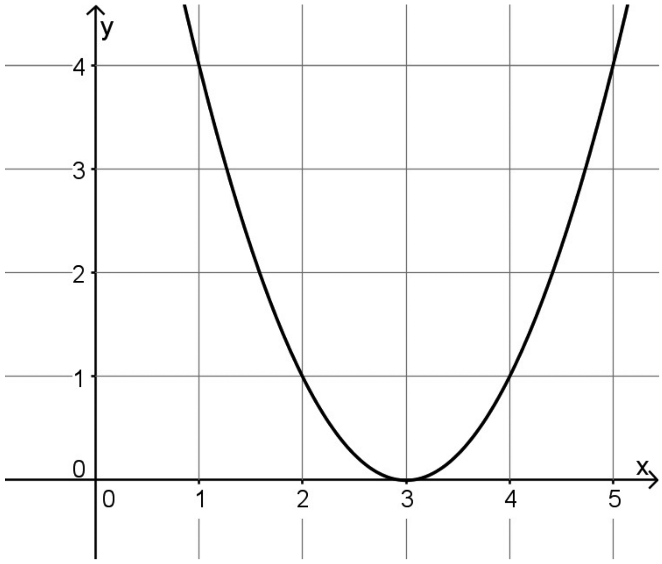
9.3 $y = 1 + 5(x + 2)^2$

9.4 $y = -(3x^2 + 1)$

A) $(-\infty; -1\rangle$
B) $(-\infty; 0\rangle$
C) $(-\infty; 1\rangle$
D) $\langle -1; \infty)$
E) $\langle 0; \infty)$
F) $\langle 1; \infty)$

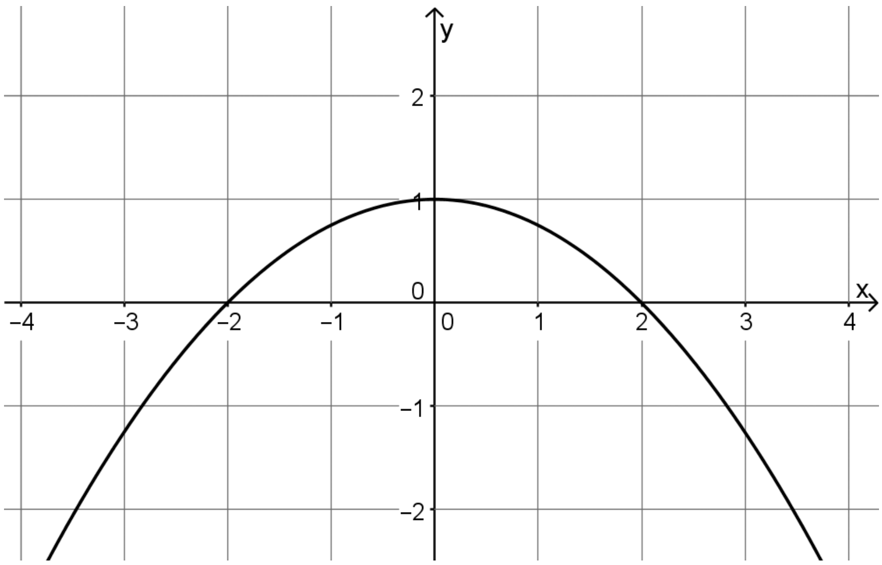
B 28

9.1
Funkce f: $y = (3 - x)^2 = (x - 3)^2 + 0$ je konvexní a vrchol má v bodě $V[3; 0]$. Jejím oborem hodnot je $H_f = \langle 0; \infty)$.



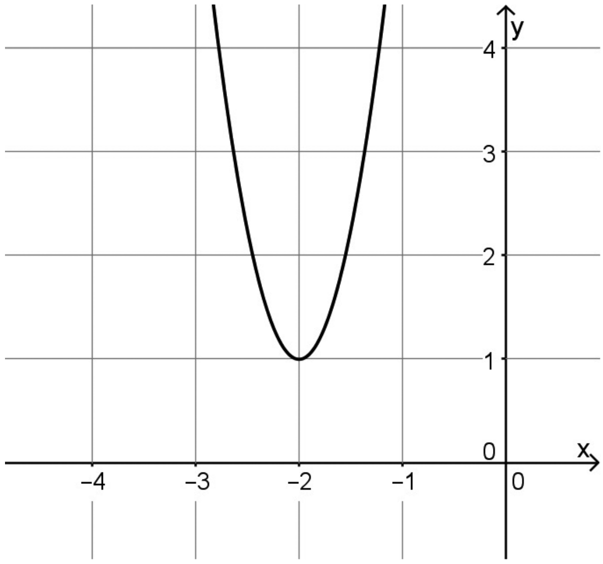
Správná možnost je E.

9.2
Funkce f: $y = \frac{1}{4}(2 - x)(2 + x) = \frac{1}{4}(4 - x^2) = 1 - \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}(x - 0)^2 + 1$ je konkávní a vrchol má v bodě $V[0; 1]$. Jejím oborem hodnot je $H_f = (-\infty; 1\rangle$.



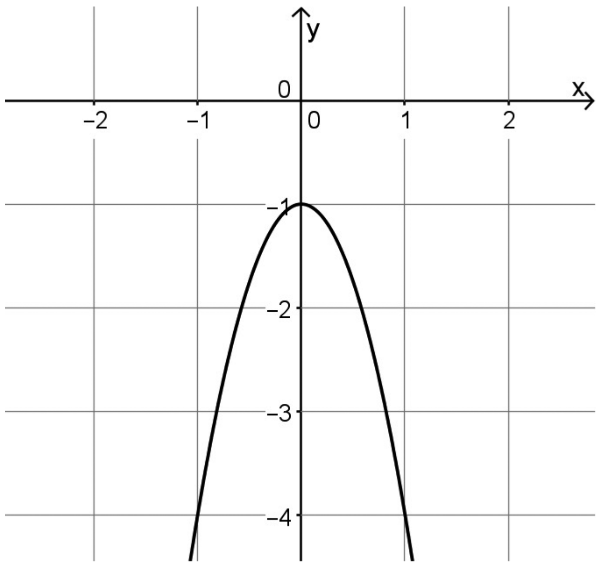
Správná možnost je C.

9.3
Funkce f: $y = 1 + 5(x + 2)^2 = 5(x + 2)^2 + 1$ je konvexní a vrchol má v bodě $V[-2; 1]$. Jejím oborem hodnot je $H_f = \langle 1; \infty)$.



Správná možnost je F.

9.4
Funkce f: $y = -(3x^2 + 1) = -3x^2 - 1 = -3(x - 0)^2 - 1$ je konkávní a vrchol má v bodě $V[0; -1]$. Jejím oborem hodnot je $H_f = (-\infty; -1\rangle$.



Správná možnost je A.

Řešení: E, C, F, A

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

Přijímací test z matematiky má 30 úloh. Za správně vyřešenou úlohu získá uchazeč 3 body, za nesprávně vyřešený příklad mu bude 1 bod odečten, za neřešenou úlohu se body ani nepřidělují, ani neodečítají.

2 body

10 Uchazeč, který čtyři úlohy nechal nevyřešené, dosáhl padesátibodového zisku. Kolik úloh vyřešil nesprávně?

A) 7
B) 8
C) 18
D) 19
E) jiný počet úloh

Označme počet správně vyřešených úloh jako x a počet nesprávně vyřešených úloh jako y.
Test má 30 úloh, přičemž uchazeč nechal 4 úlohy neřešené, proto platí: $x + y = 26$.
Za správně vyřešenou úlohu získá uchazeč 3 body, za x správně vyřešených úloh pak získá $3x$ bodů. Za nesprávně vyřešenou úlohu ztratí uchazeč 1 bod, za y nesprávně vyřešených úloh pak ztratí y bodů.
Uchazeč dosáhl padesátibodového zisku, tj. $3x - y = 50$.
Soustavu rovnic vyřešíme např. sčítací metodou, čímž zjistíme, že $x = 19$, $y = 7$.
Počet nesprávně vyřešených úloh je 7. Správná možnost je tedy A.

Řešení: A

KONEC TESTU

III. KLÍČ

1) Maximální bodové ohodnocení je 20 bodů. Hranice úspěšnosti v testu je 7 bodů.
2) Úlohy 1–6 jsou otevřené.
3) Úlohy 7–10 jsou uzavřené s nabídkou možných odpovědí, kde u každé úlohy resp. podúlohy je právě jedna odpověď správná.

Tabulka úspěšnosti	
Počet bodů	Výsledná známka
20–17	výborně
16–14	chvalitebně
13–11	dobře
10–7	dostatečně
6 a méně	nedostatečně

Úloha	Správné řešení	Počet bodů
1		
1.1	**$o: x + 2y - 3 = 0$**	max. 2 body
1.2	**$C[1; 1]$**	1 bod
2	**Při výpočtu užijeme pravidla pro počítání s odmocninami:** $\sqrt[r \cdot n]{x^{r \cdot m}} = \sqrt[n]{x^m}$ **a** $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$**, kde:** $m, n, r \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$. $\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{6^2} \cdot \sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{32 \cdot 6^2 \cdot 18} =$ $= \sqrt[4]{2^5 \cdot (2 \cdot 3)^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^4} =$ $= 2^2 \cdot 3 = 12$ **Řešení: 12**	max. 2 body
3	**$A < B$**	1 bod
4	**$d = 20$ cm**	max. 2 body
5	**$f: y = \log_2(x + 1) - 2$**	1 bod
6	**kladné**	1 bod
7	**C**	2 body
8		max. 2 body 4 podúlohy 2 b. 3 podúlohy 1 b. 2 podúlohy 0 b. 1 podúloha 0 b. 0 podúloh 0 b.
8.1	**NE**	
8.2	**ANO**	
8.3	**ANO**	
8.4	**NE**	

B 28

9		max. 4 body 4 podúlohy 4 b. 3 podúlohy 3 b. 2 podúlohy 2 b. 1 podúloha 1 b. 0 podúloh 0 b.
9.1	**E**	
9.2	**C**	
9.3	**F**	
9.4	**A**	
10	**A**	2 body

IV. ZÁZNAMOVÝ LIST

1) Maximální bodové ohodnocení je 20 bodů. Hranice úspěšnosti v testu je 7 bodů.
2) Úlohy 1–6 jsou otevřené. **Zapište výsledek. V úloze 2 uveďte i celý postup řešení.**
3) Úlohy 7–10 jsou uzavřené s nabídkou možných odpovědí, kde u každé úlohy resp. podúlohy je právě jedna odpověď správná. **Zapište vybranou možnost.**

Tabulka úspěšnosti	
Počet bodů	Výsledná známka
20–17	výborně
16–14	chvalitebně
13–11	dobře
10–7	dostatečně
6 a méně	nedostatečně

Úloha	Správné řešení	Počet bodů
1		
1.1		max. 2 body
1.2		1 bod
2		max. 2 body
3		1 bod
4		max. 2 body
5		1 bod
6		1 bod
7		2 body
8		max. 2 body 4 podúlohy 2 b. 3 podúlohy 1 b. 2 podúlohy 0 b. 1 podúloha 0 b. 0 podúloh 0 b.
8.1		
8.2		
8.3		
8.4		

B 28

9		max. 4 body 4 podúlohy 4 b. 3 podúlohy 3 b. 2 podúlohy 2 b. 1 podúloha 1 b. 0 podúloh 0 b.
9.1		
9.2		
9.3		
9.4		
10		2 body

B 28