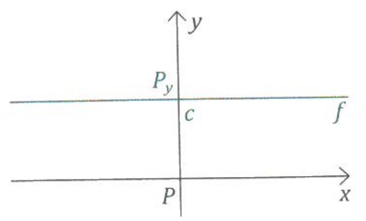
FUNKCE

FUNKCE

- zobrazení, které každému x z definičního oboru (označujeme D_f) přiřazuje právě jedno reálné číslo y
- funkce obvykle označujeme malými písmeny, nejčastěji f, g, h apod. a zapisujeme $y = f(x)$, říkáme, že funkce f nabývá v bodě x hodnotu y
- **Obor hodnot funkce f**
  - množina všech takových reálných čísel y, ke kterým existuje x z definičního oboru funkce f tak, že $f(x) = y$
  - značíme H_f
- **Graf funkce**
  - kreslíme ve zvolené souřadnicové soustavě
  - grafem funkce je množina všech bodů X o souřadnicích $X[x, f(x)]$, kde $x \in D_f$
  - grafem funkce může být přímka nebo její část, křivka nebo její část, izolované body nebo sjednocení různých částí přímek, křivek a izolovaných bodů
  - aby nějaký geometrický útvar mohl být grafem nějaké funkce, nesmí obsahovat žádnou dvojici bodů, které by měly stejnou x-ovou souřadnici a různou y-ovou souřadnici (ležely by v souřadnicové soustavě „nad sebou“)
- **Průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami**
  - P_x je bod, který leží na grafu funkce a zároveň na souřadnicové ose $x \Rightarrow$ jeho y-ová souřadnice je rovna 0; $P_x[x_0; 0]$
  - P_y je bod, který leží na grafu funkce a zároveň na souřadnicové ose $y \Rightarrow$ jeho x-ová souřadnice je rovna 0; $P_y[0; y_0]$
- **Monotonie (monotónnost) funkce**
  - funkce f se nazývá **rostoucí v intervalu** J, který je podmnožinou jejího definičního oboru, právě tehdy, když pro všechna x_1 a x_2 z intervalu J platí: je-li $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$ („se zvětšujícím se x se zvětšuje y“)
  - funkce f se nazývá **klesající v intervalu** J, který je podmnožinou jejího definičního oboru, právě tehdy, když pro všechna x_1 a x_2 z intervalu J platí: je-li $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$ („se zvětšujícím se x se zmenšuje y“)
  - pokud je interval J roven definičnímu oboru funkce f, říkáme, že funkce f je rostoucí, nebo funkce f je klesající (v celém definičním oboru)
- **Extrémy funkce**
  - funkce f má v bodě a **maximum** právě tehdy, když pro všechna x z jejího definičního oboru platí $f(x) \leq f(a)$
  - funkce f má v bodě a **minimum** právě tehdy, když pro všechna x z jejího definičního oboru platí $f(x) \geq f(a)$

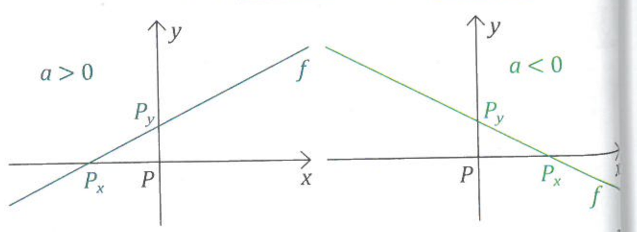
KONSTANTNÍ FUNKCE

- funkce daná předpisem $f: y = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta; grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná se souřadnicovou osou x nebo její část, pokud definiční obor funkce nejsou všechna reálná čísla
- **Vlastnosti konstantní funkce**
  - definiční obor: $D_f = \mathbb{R}$
  - obor hodnot: $H_f = \{c\}$
  - monotonie: funkce není rostoucí, není klesající
  - průsečíky se souřadnicovými osami: $P_y[0; c]$, P_x není (pro $c = 0$ je grafem osa x)



LINEÁRNÍ FUNKCE

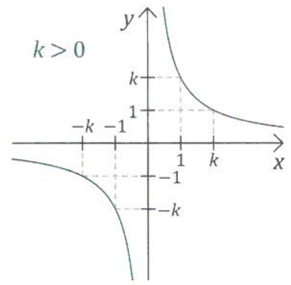
- funkce daná předpisem $f: y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- grafem funkce je přímka nebo její část, koeficient a určuje její „sklon“, koeficient b udává y-ovou souřadnici průsečíku této přímky se souřadnicovou osou y
- **Vlastnosti lineární funkce**
  - definiční obor: $D_f = \mathbb{R}$
  - obor hodnot: $H_f = \mathbb{R}$
  - monotonie: f je <u>rostoucí</u> v D_f, f je <u>klesající</u> v D_f

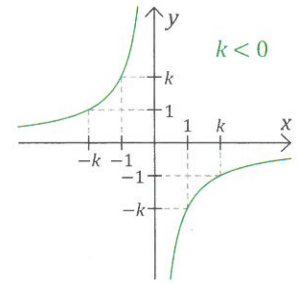


  - průsečíky se souřadnicovými osami: $P_x\left[-\frac{b}{a}; 0\right]$, $P_y[0; b]$

NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST

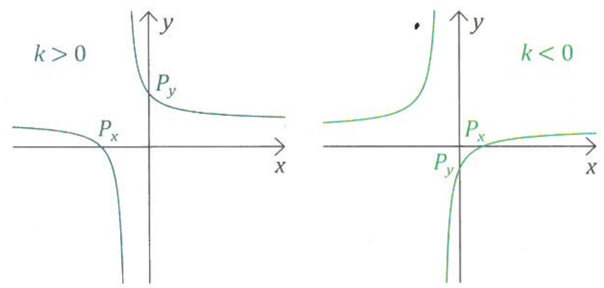
- funkce daná předpisem $f: y = \frac{k}{x}$, kde k je nenulová konstanta
- grafem funkce je hyperbola se středem v počátku souřadnicové soustavy a asymptotami v souřadnicových osách, případně její část
- koeficient k určuje „tvar“ hyperboly
- asymptota grafu funkce je taková přímka, jejíž vzdálenost od grafu se blíží k nule, když se jedna nebo obě souřadnice blíží k nekonečnu, tedy přímka, k níž se graf funkce „přibližuje“ pro velmi velké hodnoty (případně „hodně malé“ – záporné s velkou absolutní hodnotou) proměnné x nebo y
- **Vlastnosti nepřímé úměrnosti**
  - definiční obor: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
  - obor hodnot: $H_f = \mathbb{R} - \{0\}$
  - monotonie: f je <u>klesající</u> v $(-\infty; 0)$ a v $(0; \infty)$
    f je <u>rostoucí</u> v $(-\infty; 0)$ a v $(0; \infty)$
  - průsečíky se souřadnicovými osami nejsou
  - důležité body grafu: $[1; k]$, $[-1; -k]$, $[k; 1]$, $[-k; -1]$





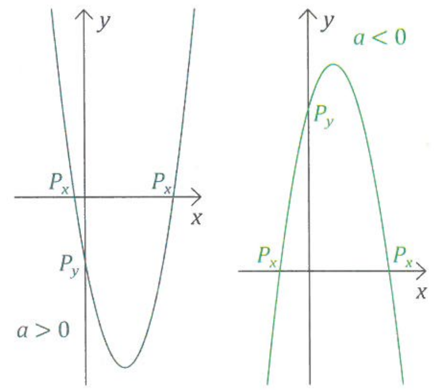
LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE

- funkce daná předpisem $f: y = \frac{ax + b}{cx + d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, a každá její část
- grafem funkce je hyperbola, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami, případně její část
- pro sestrojení grafu převedeme předpis funkce na tvar $f: y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{k}{x - m} + n$
- střed hyperboly má souřadnice $S[m, n]$, k určuje tvar hyperboly
- **Vlastnosti lineární lomené funkce**
  - definiční obor: $D_f = \mathbb{R} - \{m\}$
  - obor hodnot: $H_f = \mathbb{R} - \{n\}$
  - monotonie: f je <u>klesající</u> v $(-\infty; m)$ a v $(m; \infty)$
    f je <u>rostoucí</u> v $(-\infty; m)$ a v $(m; \infty)$
  - průsečíky se souřadnicovými osami: $P_x\left[-\frac{b}{a}; 0\right]$, $P_y\left[0; \frac{b}{d}\right]$
  - rovnice asymptot: $a_1: y = m$, $a_2: x = n$



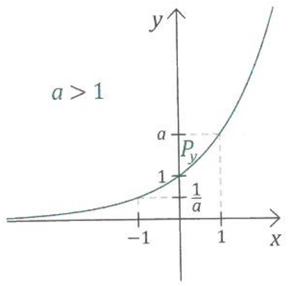
KVADRATICKÁ FUNKCE

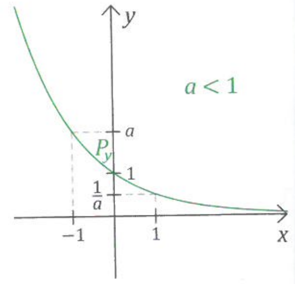
- funkce daná předpisem $f: y = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a každá její část
- grafem kvadratické funkce je parabola s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou y nebo její část, koeficient a ovlivňuje tvar paraboly
- vrchol paraboly má souřadnice $V\left[-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$
- **Vlastnosti kvadratické funkce**
  - definiční obor: $D_f = \mathbb{R}$
  - obor hodnot: $a > 0$: $H_f = \left(\frac{4ac - b^2}{4a}; \infty\right)$; $a < 0$: $H_f = \left(-\infty; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$
  - monotonie: f je <u>klesající</u> v $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ a <u>rostoucí</u> v $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$
    f je <u>rostoucí</u> v $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ a <u>klesající</u> v $\left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$
  - průsečíky se souřadnicovými osami:
    P_x: mohou existovat dva, jeden nebo žádný, jejich y-ová souřadnice je rovna 0, x-ovou souřadnici určíme řešením kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$
    $P_y[0; c]$



EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

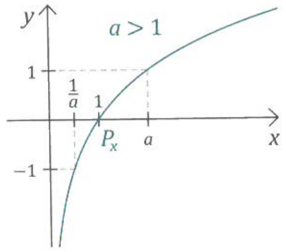
- funkce daná předpisem $f: y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, a každá její část
- grafem exponenciální funkce je exponenciála, souřadnicová osa x je její asymptotou
- **Vlastnosti exponenciální funkce**
  - definiční obor: $D_f = \mathbb{R}$
  - obor hodnot: $H_f = (0; \infty)$
  - monotonie: f je klesající v $\mathbb{R}$
    f je rostoucí v $\mathbb{R}$
  - průsečíky se souřadnicovými osami: P_x není; $P_y\,[0; 1]$
  - důležité body grafu: $[0; 1]$, $[1; a]$, $\left[-1; \frac{1}{a}\right]$

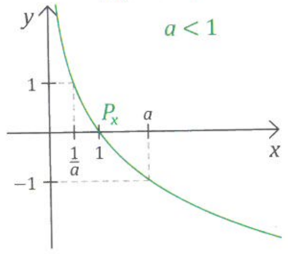




LOGARITMICKÁ FUNKCE

- je inverzní funkce k funkci exponenciální, zapisujeme $f: y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, a každá její část
- **Vlastnosti logaritmické funkce**
  - definiční obor: $D_f = (0; \infty)$
  - obor hodnot: $H_f = \mathbb{R}$
  - monotonie: f je rostoucí v $\mathbb{R}$, f je klesající v $\mathbb{R}$
  - průsečíky se souřadnicovými osami: $P_x\,[1; 0]$; P_y není
  - důležité body grafu: $[1; 0]$, $[a; 1]$, $\left[\frac{1}{a}; -1\right]$



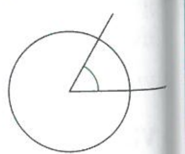


LOGARITMUS

- logaritmus čísla r ($r > 0$) o základu a ($a > 0$, $a \neq 1$) j takové číslo v, pro které platí $a^v = r$
- $\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$
- **Pravidla pro počítání s logaritmy:**
  - pro $a > 0$, $a \neq 1$, $r > 0$, $s > 0$ platí:
    - $\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$ – logaritmus součin dvou kladných čísel při libovolném základu s rovná součtu logaritmů těchto čísel při tomté základu
    - $\log_a\left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$ – logaritmus podílu dvo kladných čísel při libovolném základu se rovn rozdílu logaritmů těchto čísel při tomtéž základ
    - $\log_a r^n = n \cdot \log_a r$ – logaritmus n-té mocnin čísla r při libovolném základu se rovná n násobk logaritmu čísla r při tomtéž základu

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

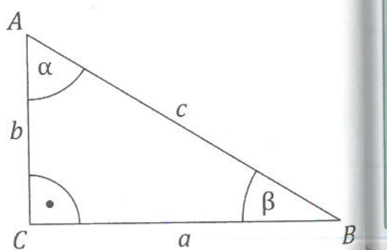
- **orientovaný úhel**
  - orientovaný úhel $\overrightarrow{AVB}$ je uspořádaná dvojice polopřímek $\overrightarrow{VA}$ (počáteční rameno) a $\overrightarrow{VB}$ (koncové rameno) se spo lečným počátkem V
  - velikost orientovaného úhlu měříme od počátečního ramene ke koncovému, kladný směr – proti směru chod hodinových ručiček
- **oblouková míra**
  - jednotkou je 1 radián – 1 radián je velikost středového úhlu, který přísluší na kružnici s poloměrem 1 oblouku o délce 1



  - Převod:

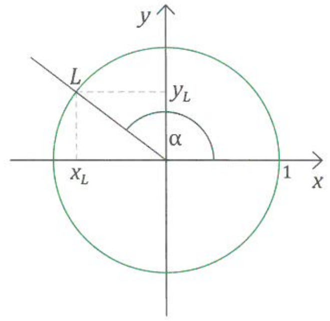
Velikost ve stupních	0	30	45	60	90	180	270	360
Velikost v radiánech	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

- **Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku**
  - Pravoúhlý trojúhelník
    - odvěsny a, b svírají pravý úhel
    - přepona c leží proti pravému úhlu

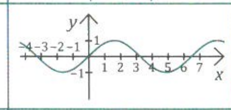
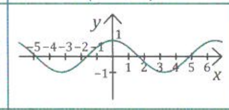
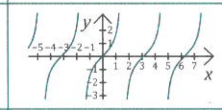
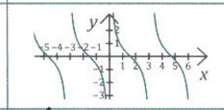


  - **Sinus:** poměr délky protilehlé odvěsny a přepony; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$

  - **Kosinus:** poměr délky přilehlé odvěsny a přepony; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$
  - **Tangens:** je poměr délky protilehlé a přilehlé odvěsny; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$
  - **Kotangens:** je poměr délky přilehlé a protilehlé odvěsny; $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$, $\mathrm{cotg}\,\beta = \frac{a}{b}$
- **Goniometrické funkce obecného úhlu**
  - **sinem orientovaného** úhlu α rozumíme y-ovou souřadnici průsečíku jednotkové kružnice a koncového ramene orientovaného úhlu α, jestliže jeho vrchol je v počátku souřadnicové soustavy a počáteční rameno splývá s kladnou poloosou x
  - **kosinem orientovaného úhlu** α rozumíme x-ovou souřadnici průsečíku jednotkové kružnice a koncového ramene orientovaného úhlu α, jestliže jeho vrchol je v počátku souřadnicové soustavy a počáteční rameno splývá s kladnou poloosou x



  - $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ pro $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ pro $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
  - $\sin\alpha = y_L$
  - $\cos\alpha = x_L$

		$f: y = \sin x$	$f: y = \cos x$	$f: y = \mathrm{tg}\,x$	$f: y = \mathrm{cotg}\,x$
Vlastnosti goniometrických funkcí	**Definiční obor**	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
	Obor hodnot	$\langle -1; 1 \rangle$	$\langle -1; 1 \rangle$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
	Graf				
	Nejmenší perioda	2π	2π	π	π
	Monotonie	f je rostoucí v $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a klesající v $\left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$	f je rostoucí v $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a klesající v $\langle 2k\pi; \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$	f je rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$	f je klesající v $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
	Průsečíky se souřadnicovými osami	$P_x\,[k\pi; 0]$, $k \in \mathbb{Z}$ $P_y\,[0; 0]$	$P_x\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ $P_y\,[0; 1]$	$P_x\,[k\pi; 0]$, $k \in \mathbb{Z}$ $P_y\,[0; 0]$	$P_x\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; 0\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ P_y není
	Extrémy	maximum v bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, minimum v bodech $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	maximum v bodech $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, minimum v bodech $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	nemá	nemá
Vztahy mezi goniometrickými funkcemi		$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{cotg}\,x = 1$ $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\left\lvert \sin\frac{x}{2} \right\rvert = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ $\left\lvert \cos\frac{x}{2} \right\rvert = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ $\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x + y}{2} \cos\frac{x - y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2 \sin\frac{x - y}{2} \cos\frac{x + y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x + y}{2} \cos\frac{x - y}{2}$ $\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x + y}{2} \sin\frac{x - y}{2}$		

DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

1 **Pro lineární funkci f platí: $f(0) = 1$, $f(-1) = 3$. Zapište předpis pro funkci f a zakreslete její graf.**

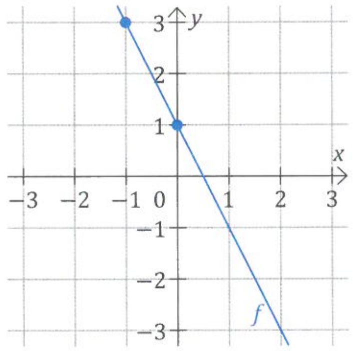
$f: y = ax + b$

$1 = a \cdot 0 + b$

$3 = a \cdot (-1) + b$

$b = 1,\ a = -2$

$f: y = -2x + 1$



1 **Rozhodněte, která z daných funkcí je klesající a zároveň její graf prochází počátkem souřadnicové soustavy.**

A) $f_1: y = 2x + 1$

B) $f_2: y = -5x - 2$

C) $f_3: y = -3x$

D) $f_4: y = 3x$

E) $f_5: y = 0$

2 **Určete obor hodnot a popište monotonii funkce.**

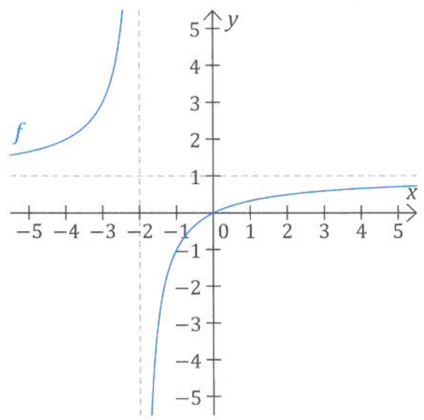
$f: y = \dfrac{x}{x+2}$

$\dfrac{x}{x+2} = 1 - \dfrac{2}{x+2},\ D = \mathbb{R} - \{-2\}$

Grafem funkce je hyperbola se středem $S[-2; 1]$.

$H_f = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

f je rostoucí v $(-\infty; -2)$ a v $(-2; \infty)$.



2 **Určete definiční obor a sestrojte graf funkce.**

$f: y = \dfrac{1-x}{x^2-1}$

3 **Řešte rovnici $\log_5(x+4) - \log_5 x = 2$.**

$x > 0,\ D = (0; \infty)$

$\log_5\left(\dfrac{x+4}{x}\right) = 2$

$\dfrac{x+4}{x} = 25$

$x + 4 = 25x$

$x = \dfrac{1}{6} \quad \rightarrow \quad K = \left\{\dfrac{1}{6}\right\}$

3 **Řešte rovnici $\log(x-2) + 2\log(x+1)^{\frac{1}{2}} = 1$.**

4 **Je dána funkce $f: y = 3^{3x} - 1$. Bod $A\,[m; 2]$ leží na grafu funkce f. Určete hodnotu m.**

$A \in f \quad \Rightarrow \quad 2 = 3^{3m} - 1$

$3^{3m} = 3$

$3m = 1$

$m = \dfrac{1}{3}$

4 **Je dána funkce $f: y = 2^{x+1} - 1$. Najděte průsečíky grafu funkce f se souřadnicovými osami a sestrojte její graf.**

5 **Najděte všechna řešení rovnice $11^{4-3x} \cdot 13^{3x-4} = 1$.**

$11^{4-3x} \cdot 13^{3x-4} = 1$

$11^{4-3x} \cdot \left(\dfrac{1}{13}\right)^{4-3x} = 1$

$\left(\dfrac{11}{13}\right)^{4-3x} = 1$

$4 - 3x = 0$

$x = \dfrac{4}{3} \quad \rightarrow \quad K = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

5 **Najděte všechna řešení rovnice $5^{2x} \cdot 4^x = 100$.**

6 **Grafem kvadratické funkce f je parabola s vrcholem v bodě $V[2; -4]$, která prochází počátkem souřadnicové soustavy. Určete $f(5)$.**

$f: y = a(x-2)^2 - 4$

$[0; 0] \in f \quad \Rightarrow \quad 0 = 4a - 4 \quad \Rightarrow \quad a = 1$

$f: y = 1 \cdot (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$

$f(5) = 25 - 20 = 5$

6 **Určete hodnotu koeficientu a v předpisu funkce $f: y = ax(x-1) + 2x$, jestliže funkce f nabývá svého maxima pro $x = \dfrac{3}{4}$.**

7 **Je dána funkce $f: y = \log_4 x + 2\log_2(8x)$ pro $x > 0$. Určete $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.**

$f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \log_4 x + 2\log_2(8x) + \log_4\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2\log_2\left(\dfrac{8}{x}\right) =$

$= \log_4 x + 2\log_2 8 + 2\log_2 x - \log_4 x + 2\log_2 8 - 2\log_2 x =$

$= 4\log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

7 **Je dáno $\log_5 8 = p$ a $\log_5 9 = q$. Pomocí proměnných p a q vyjádřete $\log_5 6$.**

8 **Najděte všechna řešení rovnice v intervalu $\langle 0; 4\pi)$.**

$1 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$

$1 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin 2x$

$1 + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2\sin x \cos x$

$2 = 2\sin 2x$

$\sin 2x = 1$

$2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$K = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{4}; \dfrac{13\pi}{4}\right\}$

8 **Najděte všechna řešení rovnice v intervalu $\langle 0; 3\pi)$.**

$4\sin^2 x - 1 = 0$

NEJČASTĚJŠÍ CHYBY U MATURITNÍ ZKOUŠKY

1 **V oboru ℝ řešte**
$\log_2 8 - 3^{x-1} = 0.$

$\log_2 8 - 3^{x-1} = 0$
$3 - 3^{x-1} = 0$
$3^1 = 3^{x-1}$
$1 = x - 1$
$x = 2$

Číselný výraz $\log_2 8$ spočítáme (pomocí definice logaritmu, popř. na kalkulačce).
Platí $3 = 3^1$.
Mocniny se stejným základem se rovnají, pokud se rovnají jejich exponenty.
Pomocí ekvivalentní úpravy převedeme na rovnici $3^{x-1} = 3$ a využijeme toho, že mocniny se stejným základem se rovnají, pokud se rovnají jejich exponenty.

Vztah $\log_2 8$ není vhodné převádět dle definice na mocninu. Tato úprava by nevedla k řešení rovnice. Je třeba si uvědomit, že jde o číselný výraz, jehož hodnotu lze spočítat. Stejně tak zde není vhodné logaritmovat výraz 3^{x-1}.

---

2 **V oboru ℝ řešte**
$\left(\frac{25}{49}\right)^{x-4} = \frac{7^x}{5^x} \cdot \frac{5}{7}.$

$\left(\frac{25}{49}\right)^{x-4} = \frac{7^x}{5^x} \cdot \frac{5}{7}$
$\left(\frac{5}{7}\right)^{2\cdot(x-4)} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{1}$
$\left(\frac{5}{7}\right)^{2\cdot(x-4)} = \left(\frac{5}{7}\right)^{-x+1}$
$2(x-4) = -x + 1$
$2x - 8 = -x + 1$
$3x = 9$
$x = 3 \quad \rightarrow \quad K = \{3\}$

Je nutné, aby na každé straně rovnice byla pouze jedna odmocnina. Všechny členy rovnice převedeme na společný základ, tj. zde $\frac{5}{7}$ $\left(\text{popř. } \frac{7}{5}\right)$.
Je-li na jedné straně exponenciální rovnice součin (podíl) mocnin se stejným základem, převedeme na jednu mocninu pomocí pravidel o součinu (podílu) mocnin. Použijeme k tomu vztahy: $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$.
Mocniny se stejným základem se rovnají, pokud se rovnají jejich exponenty.

Pokud je to možné, převedeme všechny členy rovnice na mocniny se stejným základem. Pokud to nelze, je třeba rovnici zlogaritmovat.

3 **V oboru ℝ řešte** MZ 2021
$2 \cdot 5^{200} - 5^{600} : 5^{400} = 5^x.$

$2 \cdot 5^{200} - 5^{600} : 5^{400} = 5^x$
$2 \cdot 5^{200} - 5^{200} = 5^x$
$5^{200} = 5^x$
$x = 200 \quad \rightarrow \quad K = \{200\}$

Nejprve upravíme podíl mocnin podle vztahu $a^m : a^n = a^{m-n}$. Protože obě mocniny ve druhé řádce rovnice jsou stejné, mohu je odečíst. Z rozdílu můžeme vytknout 5^{200}. Pokud mají mocniny stejný základ, rovnají se v případě, že se rovnají jejich exponenty.
Příklad lze řešit i jinými způsoby.

Rozdíl (popř. součet) mocnin lze provést, pouze pokud jsou mocniny (základ i jeho exponent) stejné.

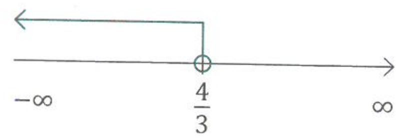
---

4 **Pro všechny přípustné hodnoty $x \in \mathbb{R}$ je dána funkce** MZ 2021 2022
$y = \log_4(4 - 3x).$

4.1 Určete definiční obor funkce f.

4.2 Určete, pro které hodnoty proměnné x platí $y = \frac{3}{2}$.

4.1
$4 - 3x > 0$
$-3x > -4$
$x < \frac{4}{3}$



$x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \quad \rightarrow \quad D_f: \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$

4.2
$\frac{3}{2} = \log_4(4 - 3x)$
$\log_4 4^{\frac{3}{2}} = \log_4(4 - 3x)$
$4^{\frac{3}{2}} = 4 - 3x$
$\sqrt{4^3} = 4 - 3x$
$\sqrt{64} = 4 - 3x$
$8 = 4 - 3x$
$4 = -3x$
$x = -\frac{4}{3}$

4.1 Definičním oborem logaritmické funkce jsou kladná reálná čísla. Argument musí být tedy větší než nula. Řešíme tedy nerovnici $4 - 3x > 0$ a výsledek zapíšeme intervalem.

4.2 Dosadíme za y hodnotu $\frac{3}{2}$ a řešíme logaritmickou rovnici. Nejprve zlogaritmujeme výraz na levé straně rovnice a pak dořešíme.

Číslo zlogaritmujeme pomocí definice na logaritmus se stejným základem, jaký má druhá strana rovnice (v tomto příkladu je základ 4).

Definice: $y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x$

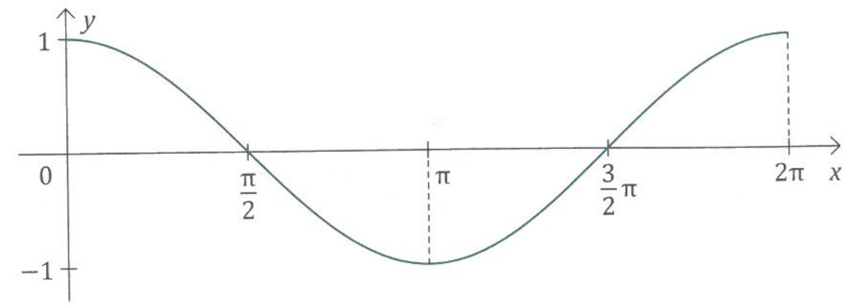
Pro úpravu výrazu $4^{\frac{3}{2}}$ použijeme vztah $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ a dopočítáme.

Příklad lze řešit i jinými způsoby.

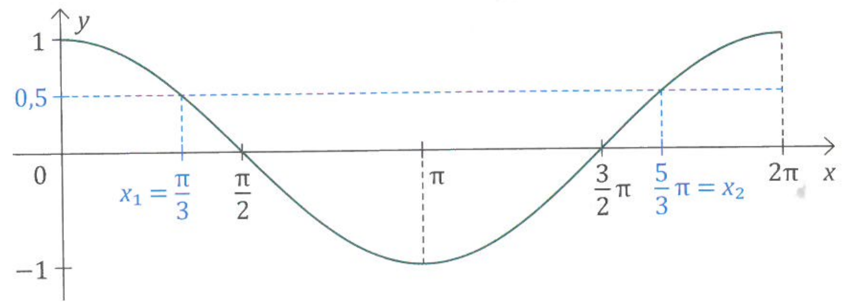
Pozor na definiční obor logaritmické funkce, který je $\mathbb{R}^+$.
Pokud nerovnici dělíme záporným číslem, otáčí se znaménko nerovnosti.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je dán graf funkce f: $y = \cos x$ pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.



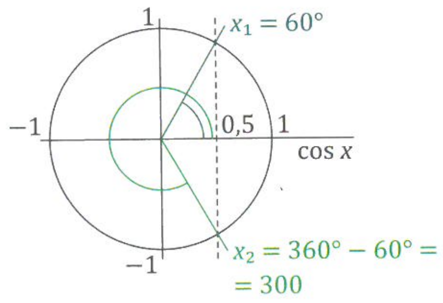
5 Vypočtěte všechny hodnoty proměnné $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro něž je $f(x) = 0{,}5$.



$x_1 = \frac{\pi}{3}$

$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

nebo



$x_1 = 60°$

$x_2 = 360° - 60° = 300°$

Úloha má v daném intervalu dvě řešení! První z nich můžeme zjistit z tabulky goniometrických funkcí (tabulka je uvedena v MFCH tabulkách, které jsou povolenou pomůckou u MZ), popř. pomocí kalkulačky. Druhé řešení dopočítáme z grafu nebo z jednotkové kružnice.

Při hledání všech řešení goniometrické rovnice je třeba znát definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici (jedno rameno úhlu x tvoří kladná část osy x, druhé rameno úhlu protíná jednotkovou kružnici v bodě M). Cos x je definován jako x-ová souřadnice bodu M. Známe-li x-ovou souřadnici bodu ($\cos x = 0{,}5$), najdeme 2 úhly – viz obrázek na jednotkové kružnici.

V zadání není řečeno, v jakém tvaru je třeba řešení uvést. Můžeme ho tedy vyjádřit ve stupňové míře i v obloukové míře.

Pozor na interval, v němž máme řešení hledat! Je třeba dopočítat všechna (v tomto případě celkem dvě) řešení.

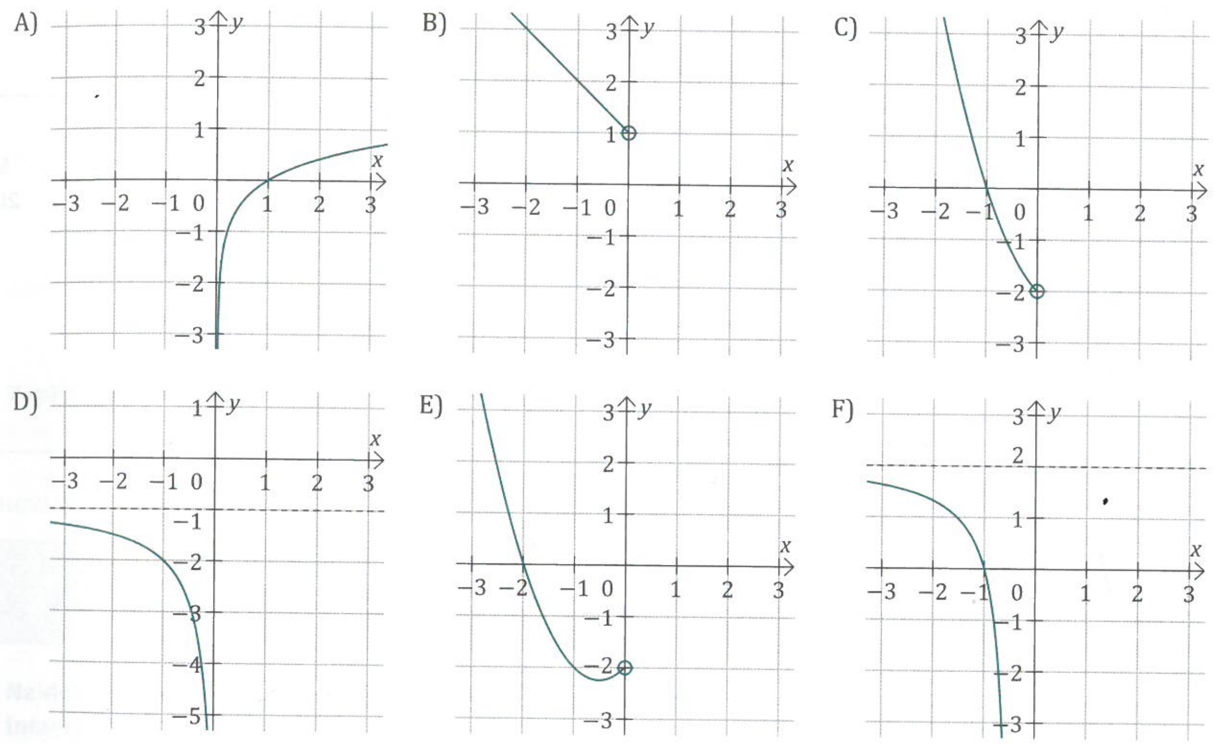
6 Každou z následujících funkcí (6.1–6.4) definujeme pro $x \in (-\infty; 0)$. Přiřaďte ke každému předpisu funkce (6.1–6.4) odpovídající graf funkce (A–F). MZ 2020 2021 2022

6.1 $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x}$ C

6.2 $y = (x^2 + x - 2) \cdot \log_2 2$ E

6.3 $y = \dfrac{2x - 2x^2}{2x}$ B

6.4 $y = \dfrac{2x - 2x^2}{2x^2}$ D



6.1 $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x} = \dfrac{x(x^2 - x - 2)}{x} = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

Kvadratická funkce – grafem je parabola, která protíná osu x v bodech $x = 2$ a $x = -1$. → graf C)

6.2 $y = (x^2 + x - 2) \cdot \log_2 2 = (x^2 + x - 2) \cdot 1 = (x-1)(x+2)$

Kvadratická funkce – grafem je parabola, která protíná osu x v bodech $x = 1$ a $x = -2$. → graf E)

6.3 $y = \dfrac{2x - 2x^2}{2x} = \dfrac{2x(1-x)}{2x} = 1 - x$

Lineární funkce – grafem je přímka. → graf B)

6.4 $y = \dfrac{2x - 2x^2}{2x^2} = \dfrac{2x(1-x)}{2x^2} = \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$

Ze známého grafu „nepřímé úměry" $\left(\frac{1}{x}\right)$ posuneme funkční hodnoty o 1 dolů ve směru osy y.

Lineární lomená funkce – grafem je hyperbola. → graf D)

pokračování úlohy na další straně

Před určováním grafu upravíme předpisy funkcí.

6.1 V čitateli zlomku vytkneme x a poté zkrátíme. Kvadratický trojčlen rozložíme (pomocí Vietových vztahů, popř. vyřešením kvadratické rovnice). Na základě znalosti nulových bodů určíme správný graf. Pozor na „otočení" paraboly, je-li koeficient a v rovnici kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$ záporný.

6.2 Kvadratický trojčlen rozložíme (pomocí Vietových vztahů, popř. vyřešením kvadratické rovnice). Číselný výraz $\log_2 2$ vypočítáme.

6.3 V čitateli zlomku vytkneme $2x$ a poté zkrátíme.

6.4 V čitateli zlomku vytkneme $2x$ a poté zkrátíme.

Pozor na definiční obor funkcí daný v zadání příkladu. Definiční obor je po správné úpravě výrazů rozhodující!

Před určováním grafu je třeba předpisy upravit.

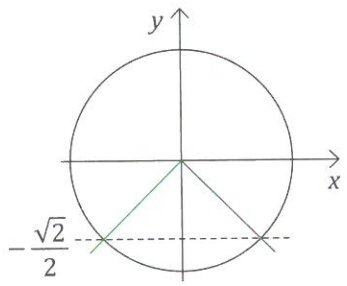
Ze znalosti grafů základních funkcí (lineární, lineárně lomené a kvadratické) určujeme grafy funkcí.

---

7 **Pro $\alpha \in \langle \pi; 2\pi \rangle$ platí: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Jaká je hodnota $\operatorname{tg} \alpha$?**

Pro $\alpha \in \langle \pi; 2\pi \rangle$, tedy pro $\alpha \in \langle 180°; 360° \rangle$

Jednotková kružnice:



$\sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha_0 = 45°$

$\alpha_1 = 180° + 45° = 225°$

$\alpha_2 = 360° - 45° = 315°$

1) $\operatorname{tg} 225° = 1$

2) $\operatorname{tg} 315° = -1$

Úloha má v daném intervalu dvě řešení.

Je vhodné načrtnout si graf funkce $\sin x$ nebo jednotkovou kružnici. Na jednotkové kružnici najdeme hodnoty $\sin \alpha$ na ose y.

Pomocí kalkulačky nebo tabulky hodnot goniometrických funkcí zjistíme základní úhel (tj. úhel v 1. kvadrantu, tedy v intervalu $\langle 0°; 90° \rangle$) pro $\sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ve třetím kvadrantu tomuto úhlu odpovídá úhel 225°, ve čtvrtém pak úhel 315°.

Hodnoty tg 225° a tg 315° spočítáme také na kalkulačce.

V zadání není řečeno, v jakém tvaru je třeba řešení uvést. Můžeme ho tedy vyjádřit ve stupňové míře i v obloukové míře.

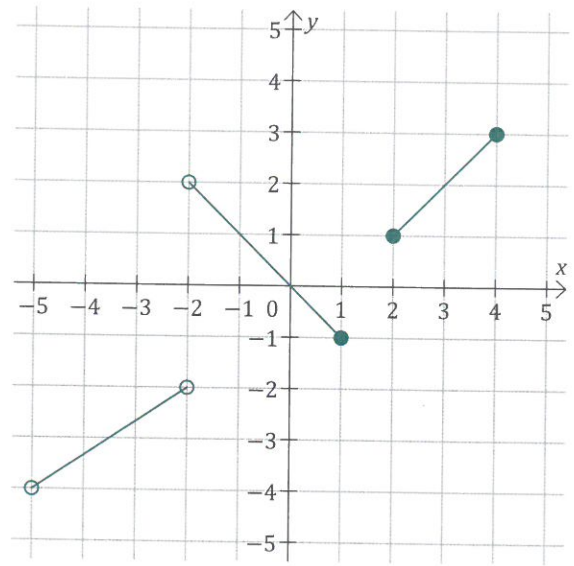
Pozor na interval, v němž máme řešení hledat!

Když je známá hodnota $\sin \alpha$, vypočítáme hodnotu α na kalkulačce pomocí inverzní funkce $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

LOHY K PROCVIČENÍ

ÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 1

Na obrázku je zakreslen graf funkce f.



Zapište pomocí intervalu definiční obor a obor hodnot funkce f.

ÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Je dána funkce $f\colon y = \sqrt{5 - x} + \frac{2x}{\sqrt{x - 3}}$.

Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která je funkce definována. Uveďte celý postup řešení a výsledek zapište pomocí intervalu.

CHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Je dána funkce $f\colon y = \frac{|x - 3|}{2x}$.

Určete hodnotu $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Uveďte celý postup řešení.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (4.1–4.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
4.1	Definičním oborem funkce $f_1\colon y = \frac{2}{\lvert x \rvert - 3}$ jsou všechna $x \in \mathbb{R}$.	☐	☐
4.2	Definičním oborem funkce $f_2\colon y = \frac{x}{x^2 + 3}$ jsou všechna $x \in \mathbb{R}$.	☐	☐
4.3	Definičním oborem funkce $f_3\colon y = \frac{2x + 2}{x + 1}$ jsou všechna $x \in \mathbb{R}$.	☐	☐
4.4	Definičním oborem funkce $f_4\colon y = \sqrt{\frac{x^2 + 3}{2}}$ jsou všechna $x \in \mathbb{R}$.	☐	☐

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Je dána funkce f: $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$ a body $A\,[0;\,0]$, $B\,[-1;\,0]$, $C\,[2;\,6]$, $D\left[-3;\,\dfrac{3}{2}\right]$.

5 Kolik z uvedených bodů leží na grafu f?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Do nádrže automobilu Škoda Octavia 1,9 TDI PD/77 kW se vejde 55 litrů motorové nafty. V technickém průkazu k v… zidlu je výrobcem uvedeno, že průměrná spotřeba při jízdě po městě je 6,3 litru nafty na 100 km. Do automobilu by… natankována plná nádrž motorové nafty.

6 Vyjádřete vhodnou funkcí množství paliva p, které zbývá v nádrži, v závislosti na počtu ujetých kilomet… jestliže automobil jezdí jen po městě při výrobcem deklarované spotřebě.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Rychlost zvuku v ve vzduchu vyjádřená v metrech za sekundu závisí ne jeho teplotě t vyjádřené v °C lineární závi… lostí $v = at + b$. Při teplotě $t_1 = 10$ °C je rychlost zvuku $v_1 = 337{,}92\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, při teplotě $t_2 = 30$ °C je rychlost zvu… $v_2 = 350{,}12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

7 Určete předpis této lineární závislosti.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Je dána funkce $y = -0{,}75x + 3$. Označme A průsečík grafu této funkce s osou x a B průsečík s osou y.

8 Vypočtěte vzdálenost bodů A a B.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

Je dána funkce f: $y = x + 2$. Grafy funkcí g a f jsou souměrné podle osy x.

9 Pro funkční přepis funkce g platí:

A) g: $y = x + 2$

B) g: $y = -x + 2$

C) g: $y = x - 2$

D) g: $y = -x - 2$

E) g: $y = \dfrac{1}{x + 2}$

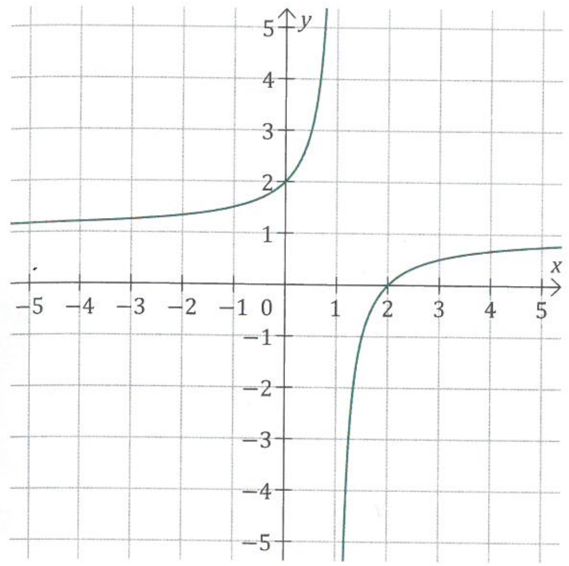
10 Přiřaďte ke každému předpisu funkce (10.1–10.3) odpovídající graf (A–E).

10.1 $y = \dfrac{x + 2}{x + 1}$ ……………

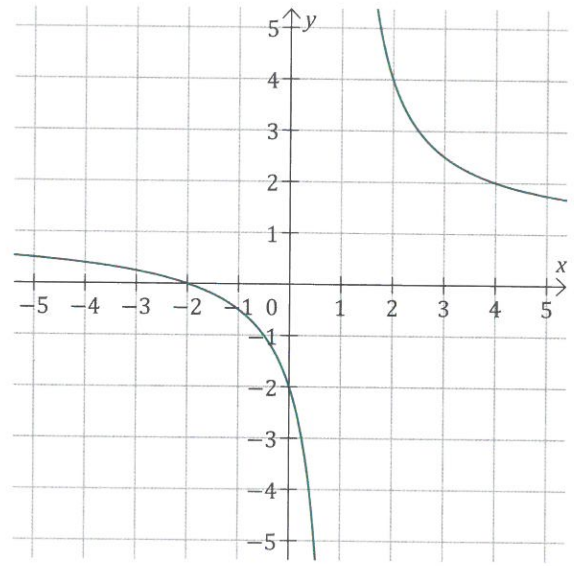
10.2 $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ ……………

10.3 $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ ……………

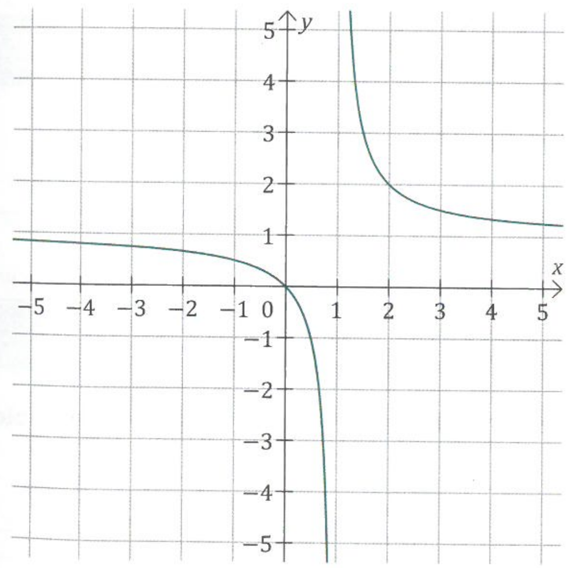
A)



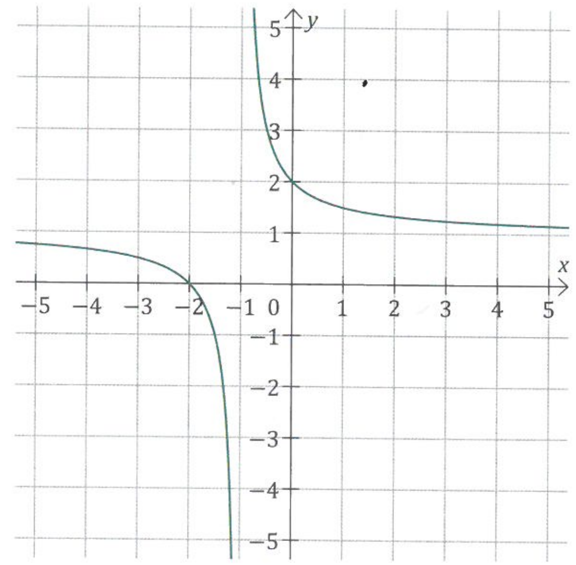
B)



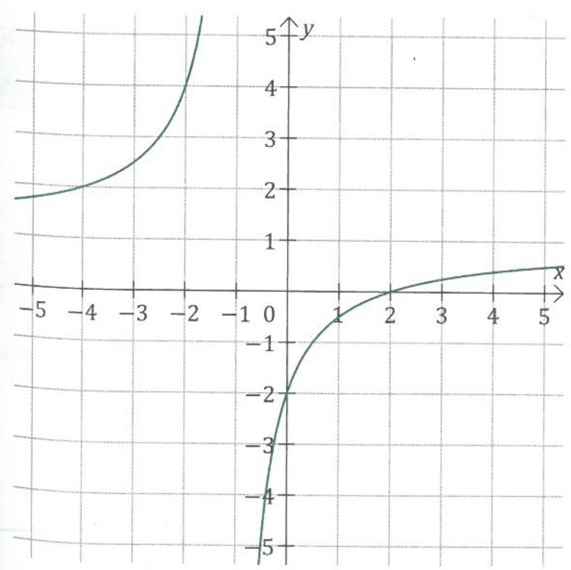
C)



D)



E)



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Jsou dány funkce $f\colon y = x - 2$, $g\colon y = ax + 4$ a bod $P\,[x;\,1]$.

11 Pro které $a \in \mathbb{R}$ se grafy obou funkcí protínají v bodě P?

A) $a = -2$
B) $a = -1$
C) $a = -\frac{1}{2}$
D) $a = 1$
E) $a = 2$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 12

Pro kvadratickou funkci f platí: graf funkce je souměrný podle osy y, hodnota minima je -4 a jeden z průsečíků funk
s osou x má souřadnice $[2;\,0]$.

12 Zapište předpis kvadratické funkce f. Uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Je dána kvadratická funkce $f\colon y = x^2 + 2x + 3$.

13 Určete všechna $a \in \mathbb{R}$, pro které platí $f(a+1) \geq f(a)$. Uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Je dána kvadratická funkce $f\colon y = x^2 + 2x - 3$.

**14 Vypočtěte obsah trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří průsečíky grafu funkce f s osami soustavy souřadnic. Uv
celý postup řešení.**

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Je dána kvadratická funkce $f\colon y = x^2 + 4x + 3$. Graf funkce g je s grafem funkce f souměrný podle osy y.

15 Pro funkční předpis funkce g platí:

A) $g\colon y = x^2 + 4x - 3$
B) $g\colon y = x^2 - 4x + 3$
C) $g\colon y = -x^2 + 4x + 3$
D) $g\colon y = x^2 - 4x - 3$
E) $g\colon y = -x^2 - 4x + 3$

ÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Je dána exponenciální funkce $f\colon y = a^{x+1} + b$ a body $A\,[-1;\,4]$, $B\,[2;\,11]$, které leží na grafu funkce f.

6 Vypočtěte součet $a + b$. Uveďte celý postup řešení.

ÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Je dána exponenciální funkce $f\colon y = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^x$.

7 Pro které $a \in \mathbb{R}$ je funkce f rostoucí? Uveďte celý postup řešení.

ÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 18

Jsou dány funkce $f\colon y = (\cos 2\pi)^{x+1}$, $g\colon y = \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2x+1}$, $h\colon y = \left(\log_{\frac{1}{2}} 4\right)^{x-1}$, $l\colon y = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^{x+3}$.

8 Kolik z uvedených funkcí je exponenciálních?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Vyberte interval, ve kterém leží řešení rovnice $2^{3-x} + 2^{1-x} - 40 = 0$.

A) $(-5;\,-3)$
B) $(-3;\,-1)$
C) $(-1;\,1)$
D) $(1;\,3)$
E) $(3;\,5)$

Řešte rovnici $\log_2(x-3) = \log_3 9$ s neznámou $x \in (3;\,\infty)$. Uveďte celý postup řešení.

CHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

Je dán výraz $V(x) = \dfrac{\sin x - \operatorname{cotg} x}{\cos x - \operatorname{tg} x}$.

Určete hodnotu výrazu $V(x)$ pro $x = \frac{\pi}{6}$. Uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 22

Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$.

22 Určete definiční obor funkce *f*. Uveďte celý postup řešení.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Je dán výraz $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin^2 x - 1}$.

23 Zjednodušte daný výraz a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je výraz definován. Uveďte celý postup řešení.

---

24 S využitím grafů obou funkcí určete, kolik řešení má rovnice $\sin x = \sin 2x$ v intervalu $\langle 0; 2\pi)$.

A) 0 řešení

B) 1 řešení

C) 2 řešení

D) 3 řešení

E) 4 řešení

---

25 Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1–25.3) bod (A–E), kterým graf funkce prochází.

25.1 $y = 2\sin x - 1$ ....

25.2 $y = \cos x + 2$ ....

25.3 $y = \operatorname{tg} x - 3$ ....

A) $A\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\sqrt{3}+1}{3}\right]$

B) $B\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\sqrt{3}+4}{2}\right]$

C) $C\left[\dfrac{\pi}{3}; \sqrt{3}-3\right]$

D) $D\left[\dfrac{\pi}{3}; \sqrt{3}-1\right]$

E) $E\left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\sqrt{3}+2}{3}\right]$

---

26 Součet všech kořenů rovnice $\sqrt{2}\sin x = 1$ v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ je roven:

A) 0

B) $\dfrac{\pi}{2}$

C) π

D) $\dfrac{3}{2}\pi$

E) 2π