KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

n-FAKTORIÁL

- pro každé přirozené číslo n roven součinu všech přirozených čísel od 1 do n
- faktoriál čísla 0 je roven 1: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, $0! = 1$

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

- pro $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ je kombinační číslo $\binom{n}{k}$ rovno $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí:
  - $\binom{n}{0} = 1$
  - $\binom{n}{n} = 1$
  - $\binom{n}{1} = n$
  - $\binom{n}{n-1} = n$
- pro $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ platí:
  - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
  - $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

ZÁKLADNÍ KOMBINATORICKÁ PRAVIDLA

- **kombinatorické pravidlo součtu**
  - jsou-li $A_1, A_2, ..., A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, ..., p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků jejich sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + ... + p_n$
  - speciálně pro dvě množiny:
    - jsou-li A a B dvě disjunktní množiny (tj. $A \cap B = \emptyset$), množina A má a prvků a množina B má b prvků, sjednocení množin $A \cup B$ má $a + b$ prvků
- **kombinatorické pravidlo součinu**
  - počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd., až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$

KOMBINATORICKÉ SKUPINY

- **variace**
  - **k-členná variace z n prvků (bez opakování)** je uspořádaná k-tice sestavená pouze z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou; počet variací bez opakování:
    $V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
  - **k-členná variace s opakováním z n prvků** je každá uspořádaná k-tice sestavená pouze z těchto n prvků; počet variací s opakováním: $V_k'(n) = n^k$
- **kombinace**
  - **k-členná kombinace (bez opakování) z n prvků** je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou; počet kombinací bez opakování:
    $C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- **permutace**
  - **permutace z n prvků** – každá n-členná variace z n prvků; počet permutací z n prvků: $P(n) = n!$
  - **permutace s opakováním z n prvků** – uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje alespoň jednou; počet permutací s opakováním z n prvků:
    $P'(p_1, p_2, ..., p_k) = \frac{(p_1 + p_2 + ... + p_k)!}{p_1!\, p_2! \, ... \, p_k!}$

ZÁKLADNÍ POJMY Z PRAVDĚPODOBNOSTI

- **náhodný pokus** – takový děj, při kterém i když se snažíme vždy o stejné provedení, získáváme různé výsledky, které závisí na náhodě; množina všech možných výsledků pokusu Ω obsahuje všechny možné výsledky, které se navzájem vylučují (nemohou nastat dva zároveň), přičemž jeden z nich vždy nastane
- podmnožiny množiny Ω nazýváme **jevy**
- **sjednocení** jevů A a B ($A \cup B$) je jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A a B
- **průnik** jevů A a B ($A \cap B$) je jev, který nastane právě tehdy, když nastanou oba jevy A i B
- **jev nemožný** je jev, který nemůže nastat
- **jev jistý** je jev, který nastane vždy
- je-li průnikem jevů A a B jev nemožný, jsou jevy A a B **disjunktní** – neslučitelné
- **jev opačný** k jevu A je jev A', který nastává právě tehdy, když nenastává jev A

PRAVDĚPODOBNOST NÁHODNÉHO JEVU

- má-li náhodný pokus n možných výsledků a jsou-li tyto výsledky všechny stejně možné, pak o každém řekneme, že má pravděpodobnost $\frac{1}{n}$
- pravděpodobnost **jistého** jevu je rovna 1
- pravděpodobnost **nemožného** jevu je rovna 0
- pravděpodobnost **libovolného** jevu je číslo z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$
- pravděpodobnost **sjednocení dvou navzájem se vylučujících** (neslučitelných) jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností, tedy $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- pravděpodobnost sjednocení jevů, které nejsou neslučitelné, je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - p(A \cap B)$
- pravděpodobnost opačného jevu je $P(A') = 1 - P(A)$

STATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY POLOHY

- **aritmetický průměr**
  - součet hodnot znaku zjištěných u všech jednotek souboru dělený počtem všech jednotek souboru
  - $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$
- **modus** znaku x
  - hodnota x s největší četností (značíme Mod (x))
- **medián** znaku x
  - prostřední hodnota znaku, jestliže jsou hodnoty $x_1, x_2, ..., x_n$ seřazeny podle velikosti, případně aritmetický průměr dvou prostředních hodnot, je-li hodnot sudý počet (značíme Med (x))
  - medián dělí statistický soubor na polovinu, obdobně kvartily na čtvrtiny, decily na desetiny a percentily na setiny
  - percentil udává, kolik procent hodnot je v souboru seřazených hodnot znaku za vybranou hodnotou

CHARAKTERISTIKY VARIABILITY

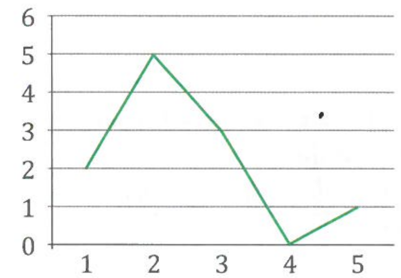
- vyjadřují proměnlivost znaku
- **rozptyl**
  - aritmetický průměr druhých mocnin odchylek od aritmetického průměru:
    $s_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$,
    po úpravách $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$
- **směrodatná odchylka**
  - druhá odmocnina z rozptylu:
    $s_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$

ZÁKLADNÍ STATISTICKÉ POJMY

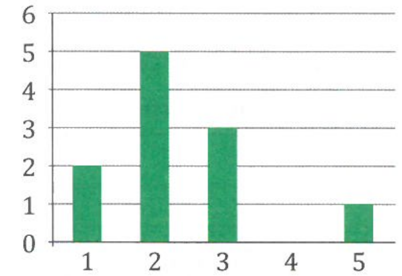
- **statistický soubor**
  - soubor zkoumaných osob, událostí, časových období apod.; jeho prvky jsou **statistické jednotky**; na statistických jednotkách vyšetřujeme zvolený **statistický znak** (buď kvantitativní – lze vyjádřit číslem, nebo kvalitativní – není vyjádřený pomocí čísla), určujeme **hodnotu znaku**
- četnost hodnoty statistického znaku udává počet výskytů znaku ve statistickém souboru, relativní četnost hodnoty statistického znaku udává, kolik procent hodnot znaku ze statistického souboru je rovno zvolené hodnotě
- údaje zapisujeme do tabulky četností ($n = n_1 + n_2 + ... + n_r$):

Hodnota znaku x	x_1*	x_2*	...	x_r*
Četnost	n_1	n_2	...	n_r
Relativní četnost	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_r}{n}$

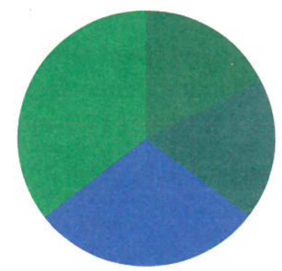
- **Grafické znázornění četností:**
  - **spojnicový diagram (polygon četností)**



  - **sloupcový diagram (histogram)**



  - **kruhový (koláčový) diagram**



DVOJICE ŘEŠENÝCH A NEŘEŠENÝCH ÚLOH

1 **Určete počet všech čtyřciferných čísel, která jsou dělitelná čtyřmi, začínají číslicí 5 a končí číslicí 2.**

Na pozici desítek může být číslice 1, 3, 5, 7, 9, na pozici stovek může být libovolná z 10 číslic. Užitím kombinatorického pravidla součinu určíme počet všech takových čísel: $n = 5 \cdot 10 = 50$.

1 **Určete počet všech pěticiferných čísel, která jsou dělitelná 25, začínají číslicí 7 a končí číslicí 0.**

2 **Osm fotbalových mužstev hraje turnaj systémem každý s každým. Během celého turnaje padlo celkem 126 gólů. Kolik gólů padlo průměrně v jednom zápase?**

Počet zápasů byl $\binom{8}{2} = 28$.

Počet gólů na jeden zápas byl $\frac{126}{28} = 4{,}5$.

Průměrný počet gólů na jeden zápas byl 4,5.

2 **Školní volejbalový turnaj se hrál systémem každý s každým. Jeden zápas trval 15 minut, celkem se hrálo 3 hodiny a 45 minut. Vypočtěte, kolik týmů se zúčastnilo turnaje.**

3 **Zjednodušte výraz a uveďte podmínky, za kterých výraz existuje.**

$$\frac{(p+1)!}{(p-1)!} - \frac{(p+5)!}{(p+4)!} - \frac{(p-5)!}{(p-7)!}$$

$p \in \mathbb{N}, p \geq 7$

$$\frac{(p+1)!}{(p-1)!} - \frac{(p+5)!}{(p+4)!} - \frac{(p-5)!}{(p-7)!} =$$

$$= (p+1)p - (p+5) - (p-5)(p-6) =$$

$$= p^2 + p - p - 5 - p^2 + 11p - 30 = 11p - 35$$

3 **Zjednodušte výraz a uveďte podmínky, za kterých výraz existuje.**

$$\frac{(p+6)!}{(p+5)!} - \frac{(p-6)!}{(p-8)!} - \frac{(p+1)!}{(p-1)!}$$

4 **Vypočtěte pravděpodobnost, že dvojciferné číslo vytvořené pouze z číslic 1, 2, 3, 4 a 5 je dělitelné třemi.**

Číslo bude dělitelné třemi tehdy, když jeho ciferný součet bude dělitelný třemi – lze tedy vybrat dvojice 12, 21, 15, 51, 24, 42 a 33 (7 dvojic).

Celkový počet čísel je $V_2'(5) = 2^5 = 32$.

$$P = \frac{7}{32}$$

Hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{7}{32}$.

4 **Vypočtěte pravděpodobnost, že dvojciferné číslo vytvořené pouze z číslic 5, 6, 7, 8 a 9 je dělitelné devíti.**

5 **Lucka má v seznamu 32 přátel – 21 dívek a 11 hochů, právě jeden z nich se jmenuje Ondřej a právě jeden se jmenuje Bob. Na večírek z tohoto seznamu pozve 3 dívky a 4 chlapce.**

Kolika způsoby to může udělat? Jaká je pravděpodobnost, že mezi pozvanými budou Ondřej a Bob, bude-li Lucka vybírat náhodně?

Počet možností výběru dívek:

$C_3(21) = \binom{21}{3} = 1\,330$

Počet možností výběru hochů:

$C_4(11) = \binom{11}{4} = 330$

Užitím kombinatorického pravidla součinu určíme celkový počet možností výběru přátel:

$1\,330 \cdot 330 = 438\,900$

Lucka má 438 900 možností.

Počet možností výběru hochů, bude-li mezi nimi Ondřej a Bob:

$C_2(9) = \binom{9}{2} = 36$

Hledaná pravděpodobnost je $P = \frac{1\,330 \cdot 36}{438\,900} = \frac{6}{55}$.

5 **Alena má před maturitou připravených 30 knížek k přečtení, každá kniha má jiného autora. 20 z nich je próza a 10 poezie, jedna je od Jiřího Wolkera a jedna od Vítězslava Nezvala. Na prázdniny k babičce si plánuje vzít s sebou 5 knih prózy a 2 poetické knihy.**

Kolika způsoby může Alena vybrat knihy na prázdniny? Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru mezi vybranými bude Nezval i Wolker?

6 **Při tréninku na lyžařském můstku skočil závodník při čtyřech tréninkových skocích do vzdálenosti 94 m, 100 m, 94 m a 96 m. Vypočtěte, jak dlouhý by musel být pátý skok, aby závodník dosáhl průměrného výkonu 98 m.**

$$\bar{x} = \frac{94 + 100 + 94 + 96 + x_5}{5}$$

$$98 = \frac{94 + 100 + 94 + 96 + x_5}{5}$$

$$x_5 = 106 \text{ m}$$

Skok by musel být dlouhý 106 m.

6 **Petr získal v 5 testech postupně 18, 15, 17, 15 a 9 bodů. Kolik bodů musí získat z posledního testu, aby jeho průměrný bodový zisk byl 15 bodů?**

7 **Rodinu Novákových tvoří matka, otec a děti. Průměrný věk všech členů rodiny je 23 roků, průměrný věk rodičů je 45,5 roku, průměrný věk dětí je 14 let. Kolik dětí je v rodině Novákových?**

Počet dětí označíme n.

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 45{,}5 + 14n}{n+2}$$

$$23 = \frac{2 \cdot 45{,}5 + 14n}{n+2}$$

$$23(n+2) = 2 \cdot 45{,}5 + 14n$$

$$n = 5$$

V rodině je 5 dětí.

7 **V turistickém oddíle jsou dva vedoucí, jejichž věkový průměr je 22 let, a několik dětí s věkovým průměrem 12 let. Celkový věkový průměr oddílu je 14 let. Kolik dětí je v oddílu?**

NEJČASTĚJŠÍ CHYBY U MATURITNÍ ZKOUŠKY

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 1

V přepravce je 20 cibulek červených tulipánů a 8 cibulek žlutých tulipánů. Náhodně vybereme dvě cibulky.

1 Určete pravděpodobnost, že náhodně vybereme jeden červený a jeden žlutý tulipán. MZ 2021
(Výsledek zapište v procentech zaokrouhlených na desetiny.)

$$\frac{\binom{20}{1}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{28}{2}} = \frac{\frac{20!}{(20-1)!\cdot 1!}\cdot\frac{8!}{(8-1)!\cdot 1!}}{\frac{28!}{(28-2)!\cdot 2!}} = \frac{80}{189} \doteq 0{,}423 = 42{,}3\ \%$$

Pravděpodobnost je poměr počtu případů příznivých ku počtu případů možných.

Počet zjistíme pomocí kombinací – nezáleží na pořadí, ve kterém jsou cibulky vybírány. Počet případů příznivých spočítáme pomocí kombinatorického pravidla součinu.

Pomůcka: spojka „a" představuje násobení.

V tomto případě v čitateli nemusí být kombinační čísla. Stačí vynásobit 20 a 8 (ke každému z 20 červených tulipánů lze přiřadit jednu cibulku z 8 žlutých tulipánů). Ve jmenovateli se jedná o kombinace druhé třídy (vybíráme dvě cibulky) z 28.

K výpočtům kombinačních čísel můžeme využít kalkulačku s funkcemi (nCr – např. $28C2$), není třeba rozepisovat pomocí faktoriálů.

V čitateli je třeba podle kombinatorického pravidla součinu počítat zvlášť červené a zvlášť žluté tulipány.

Musíme si uvědomit, že z 28 tulipánů vybíráme dvojice.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Kód má 4 znaky. Obsahuje jedno písmeno ze čtyř možných (K, Y M, P) a tři různé číslice z pěti možných (1, 2, 4, 5, 9). Na prvním místě kódu je písmeno. Na druhém místě kódu je číslice 9, na posledním místě je lichá číslice. Podmínkám vyhovují např. kódy K921, Y945.

2 Kolik různých kódů lze sestavit uvedeným způsobem? MZ 2021

A) 20
B) 24
C) 30
D) 33
E) 40

$4\cdot 1\cdot 3\cdot 2 = 24 \longrightarrow$ možnost B)

Spočítáme, kolik je možností umístění znaků na jednotlivé pozice:

- na první pozici může být jedno ze čtyř písmen – tedy 4 možnosti;
- na druhé pozici je číslice 9 – tedy jedna možnost;
- na čtvrté pozici je lichá číslice, z nabízených 1 nebo 5 – tedy dvě možnosti;
- na třetí pozici zbývají z nabízených čísel tři.

Použijeme kombinatorické pravidlo součinu a vynásobíme počet možností na jednotlivých pozicích.

Jde o variace – záleží na pořadí znaků v kódu.

Je třeba si uvědomit, kolik možností umístění znaků je na jednotlivé pozice.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Pavel má 2 černé a 3 červené karty, Johana 4 černé a 1 červenou. Z uvedených karet losujeme trojici.

3 Přiřaďte ke každému z následujících jevů (3.1–3.4) pravděpodobnost (A–F), se kterou může daný jev nastat. MZ 2019 2022

3.1 Ve vylosované trojici budou obě Pavlovy černé karty. ....
3.2 Ve vylosované trojici budou všechny tři černé karty. ....
3.3 Ve vylosované trojici budou jen Johančiny karty. ....
3.4 Ve vylosované trojici budou jen Pavlovy červené karty. ....

A) $\frac{1}{15}$
B) $\frac{3}{10}$
C) $\frac{1}{12}$
D) $\frac{1}{6}$
E) $\frac{1}{2}$
F) $\frac{1}{120}$

3.1 $\dfrac{\binom{2}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1\cdot 8}{\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}} = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15} \longrightarrow$ možnost A)

3.2 $\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{6} \longrightarrow$ možnost D)

3.3 $\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{12} \longrightarrow$ možnost C)

3.4 $\dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}} = \dfrac{1}{120} \longrightarrow$ možnost F)

Pravděpodobnost je poměr počtu případů příznivých ku počtu případů možných.

Počet zjistíme pomocí kombinací – nezáleží na pořadí, ve kterém jsou karty losovány. Počet příznivých případů spočítáme pomocí kombinatorického pravidla součinu nebo kombinačním číslem.

K výpočtům kombinačních čísel můžeme využít kalkulačku s funkcemi (nCr – např. $10C3$), není třeba rozepisovat pomocí faktoriálů.

3.1 Vybíráme dvě ze dvou Pavlových černých karet a k nim jednu jakoukoli ze zbylých. V čitateli stačí vynásobit 1 a 8. V trojici vybereme obě Pavlovy karty – jedna možnost a k této jedné možnosti můžeme přiřadit jednu z 8 zbývajících karet.

3.2 Vybíráme tři ze všech černých karet, které jsou k dispozici – tedy ze šesti.

3.3 Vybíráme pouze z Johančiných karet, tedy tři karty z pěti.

3.4 Ve vybrané trojici musí být všechny tři Pavlovy červené karty.

Počty případů možných i příznivých je třeba spočítat pomocí kombinací či pomocí kombinatorického pravidla součinu. Musíme si vždy ujasnit, jaké karty chceme vylosovat a jaký počet jich je k dispozici.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Na první polici jsou 4 knihy anglické a 5 českých. Na druhé polici jsou 2 anglické a 7 českých knih.

4 Vypočtěte, kolika způsoby lze vybrat dvojici knížek tak, aby byla jedna anglická a jedna česká a nebyly ze stejné police? MZ 2021

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{7}{1}+\binom{5}{1}\cdot\binom{2}{1}=4\cdot 7+5\cdot 2=38$$

Nemusíme psát řešení pomocí kombinačních čísel. Stačí uvést $4 \cdot 7 + 5 \cdot 2 = 38$. (Ke každé ze čtyř anglických knih lze přiřadit jednu ze sedmi českých a stejný postup provedeme i pro druhou možnost).

Musíme tedy použít kombinatorické pravidlo součtu i součinu. Pomůcka: spojka „a" představuje násobení, „nebo" součet.

Pozor na skutečnost, že mohou nastat dvě možnosti – buď z první police anglická a z druhé česká kniha, nebo z první česká a z druhé anglická kniha. Je třeba spočítat obě.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 5

V tabulce je přehled kapesného, které dostává 16 žáků jedné třídy. Jeden údaj chybí. Modus všech odměn a jejich aritmetický průměr jsou v poměru 16 : 17.

Kapesné v korunách	100	200	400		800
Četnost	3	2	6	1	4

5 Vypočtěte v korunách: MZ 2020

5.1 aritmetický průměr kapesného všech dětí.

5.2 chybějící údaj v tabulce.

Mod $(x) = 400$

5.1 $400 : \bar{x} = 16 : 17$

$$\frac{400}{\bar{x}}=\frac{16}{17}$$
$$\frac{\bar{x}}{400}=\frac{17}{16}$$
$$\bar{x}=\frac{17}{16}\cdot 400$$
$$\bar{x}=425$$

5.2 neznámá výše kapesného .... y

$$\frac{3\cdot 100+2\cdot 200+6\cdot 400+1y+4\cdot 800}{3+2+6+1+4}=425$$
$$\frac{6\,300+y}{16}=425$$
$$y=500$$

Modus je nejčastěji se vyskytující hodnota ve statistickém souboru.

Aritmetický průměr je součet všech hodnot dělený jejich počtem.

Aritmetický průměr dopočteme ze znalosti poměru mezi ním a modem souboru.

Neznámou hodnotu kapesného vypočteme ze vztahu pro výpočet aritmetického průměru.

Pozor na pořadí členů v poměru!

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 6

Každý ze 77 účastníků závodu získal buď 1, 2, 3, nebo 4 body. Jeden bod získalo 12 účastníků, což je o třetinu více účastníků než těch, kteří získali 4 body. Tři body získalo o 80 % více lidí než dva body.

Počet bodů	1	2	3	4
Četnost	12			

6 MZ 2020

6.1 Vypočtěte, kolik účastníků získalo 2 body.

6.2 Určete medián počtu bodů.

6.1 4 body .... 12 jsou $\frac{4}{3}$

$\frac{3}{3}$ .... $(12 : 4) \cdot 3 = 9$

2 body .... x lidí

3 body .... $1{,}8x$ lidí

Počet bodů	1	2	3	4
Četnost	12	x	$1{,}8x$	9

$$12 + x + 1{,}8x + 9 = 77$$
$$2{,}8x = 56$$
$$x = 20$$

2 body získalo 20 lidí.

6.2 3 body .... $1{,}8 \cdot 20 = 36$ lidí

Počet bodů	1	2	3	4
Četnost	12	20	36	9

medián .... $77 : 2 = 38{,}5 \Rightarrow$ 39. člen $\Rightarrow 3$

Nejprve vypočteme chybějící údaje v tabulce.

Účastníků se dvěma body je o třetinu víc než těch se čtyřmi body. Takže 12 jsou $\frac{4}{3}$ počtu lidí se čtyřmi body.

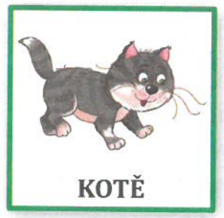
Sestavíme rovnici pro dopočtení zbylých chybějících údajů.

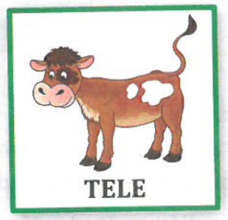
Medián je prostřední hodnota uspořádaného souboru. V tomto případě má soubor 77 členů, prostřední je tedy 39. člen.

Pozor na zadání příkladu! („12 účastníků, což je o třetinu více než účastníku se čtyřmi body")

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZKY K ÚLOZE 7

Děti ve školce se učí pojmenovat mláďata zvířat. Na stole leží řada 6 obrázků různých mláďat zvířat v pořadí dle obrázku níže.





7 Vypočtěte: MZ 2022

7.1 Anička odebere náhodně dva obrázky. Zbývajícími obrázky nepohne. Kolik různých čtveřic obrázků může takto vytvořit?

7.2 Kolik z nových řad po odebrání dvou obrázků bude mít na předposledním místě štěně?

7.1 $\binom{6}{2} = 15$

7.2 $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} = 6$

Počet možností odebrání obrázků zjistíme pomocí kombinačního čísla. Jedná se zde o kombinace druhé třídy ze šesti prvků, protože nezáleží na pořadí odebíraní obrázků.

K výpočtům kombinačních čísel můžeme využít kalkulačku s funkcemi (nCr – např. $3C2$), není třeba rozepisovat pomocí faktoriálů.

7.1 Počet všech možností, jak vzít dva obrázky ze šesti: $\binom{6}{2} = 15$.

Po odebrání 2 obrázků zbydou v řadě čtyři. Protože ŠTĚNĚ musí zůstat na předposledním místě, je nutné odebrat právě jednu kartičku z dvojice TELE a JEHNĚ, tzn. dvě možnosti. K těmto dvěma možnostem pak z trojice KOTĚ, KUŘE a SELE odebereme jednu kartičku. A to jsou tři možnosti. Štěně je na předposledním místě, musí být před ním dva obrázky, tedy dva obrázky ze tří – $\binom{3}{2}$.

Počet možností odebírání obrázků v případě 7.2 spočítáme pomocí kombinatorického pravidla součinu. Pomůcka: spojka „a" představuje násobení.

V příkladu 7.2 je třeba rozdělit situaci na „před štěnětem" a „po štěněti".

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1 Vypočtěte.

$$\frac{\binom{8}{0} - \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{5} - \binom{8}{6} + \binom{8}{7}}{5! - 3!} =$$

2 Pro $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$ zjednodušte výraz obsahující faktoriály na co nejjednodušší tvar. Uveďte celý postup řešení.

$$\frac{(x+3)!}{(x+1)!} + \frac{(x+1)!}{(x-1)!} - 2 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} =$$

A) $8x + 6$

B) $6x + 6$

C) $x^2 + 6$

D) $20x - 12$

E) $4x - 7$

3 Rozhodněte, zda následující rovnosti (3.1–3.4) platí (A), či nikoli (N).

		A	N
3.1	$12 \cdot \binom{5}{2} = 5!$	☐	☐
3.2	$\binom{20}{17} = \binom{20}{3}$	☐	☐
3.3	$\binom{15}{6} + \binom{15}{7} = \binom{16}{7}$	☐	☐
3.4	$\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{0} = 4! - 2!$	☐	☐

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 4

V krásných lužních lesích Střední Moravy se koná mistrovství ČR štafet v orientačním běhu. Trenér vybírá do štafety tří závodníky. K dispozici má 7 chlapců v kategorii H12, 6 dívek v kategorii D12, 5 chlapců v kategorii H14 a 9 dívek v kategorii D14. Družstvo vybrané štafety se vždy skládá pouze z účastníků dané věkové kategorie a pohlaví (nejedná se tedy o smíšené štafety).

Kategorie	Počet závodníků
D12	6
D14	9
H12	7
H14	5

4 Přiřaďte ke každé otázce (4.1–4.3) správnou odpověď (A–E).

4.1 Kolik má trenér možností na sestavení jednoho družstva v kategorii H12? ....

4.2 Kolik může sestavit celkem dívčích štafet (D12 a D14)? ....

4.3 Kolik existuje možností pro výběr členů štafety ve věkové kategorii 14 let (D14 a H14)? ....

A) 35

B) 104

C) 94

D) 840

E) 1 680

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Pepík Novák koupil manželce Jarušce k narozeninám kufr s číselným zámkem. Kód zámku je pětimístný, na každou pozici lze vybírat jen jednu z číslic 1 až 9. Pepík řekl Jarušce číselný kód, který jí nastavil. Bohužel Jaruška si zapamatovala pouze to, že každá číslice byla jiná.

5 Kolik možností má Jaruška k nastavení číselného kódu, byla-li poslední číslice její oblíbená šestka?

A) 70
B) 6 720
C) 126
D) 1 680
E) 40

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Šéftrenér české biatlonové reprezentace má sestavit smíšenou štafetu pro další závod světového poháru, tj. hledá vhodnou dvojici mužů a dvojici žen. V širším kádru má 6 mužů a 7 žen. Určitě pojede Gábina Koukalová.

6 Kolik mu zbývá možností na doplnění plného počtu štafety?

A) 315
B) 90
C) 36
D) 21
E) 220

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Vendelín si hraje se dvěma hracími kostkami. Postupně hází oběma najednou. Protože ještě není úplně zdatný v počtech, poprosí dědu Evžena, aby mu odpověděl na několik zvídavých otázek.

7 Rozhodněte, zda mu děda odpověděl správně (A), či nikoli (N).

		A	N
7.1	Pravděpodobnost, že padne součet 5, je $\frac{1}{9}$.	☐	☐
7.2	Pravděpodobnost, že padne součet 7, je $\frac{1}{6}$.	☐	☐
7.3	Pravděpodobnost, že <u>nepadne</u> součet 6, je $\frac{1}{8}$.	☐	☐
7.4	Pravděpodobnost, že padne součet 5 nebo 6, je $\frac{1}{4}$.	☐	☐

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Známý americký symbolog Robert Langdon byl pozván do Budapešti na sympozium s názvem „Šifrujeme od malička". Po úvodní přednášce o historii šifrování vyzval účastníky, aby zkusili vyřešit jednu vcelku lehkou úlohu. Nejrychlejšímu řešiteli věnuje svou nejnovější knihu s vlastnoručním podpisem.

8

8.1 Kolik je různých možností na sestavení hesla, které je tvořeno uspořádanou šesticí velkých tiskacích písmen obsažených v názvu místa konání sympozia, tj. BUDAPEST, mohou-li se písmena v názvu opakovat? Slova nemusí mít skutečný smysl.

8.2 Kolik je různých možností na sestavení hesla, které je tvořeno uspořádanou šesticí velkých tiskacích písmen obsažených v názvu konání sympozia, tj. BUDAPEST, jestliže se v heslu každé písmo vyskytuje jen jednou a je obsažena skupina PES?

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

Na skautský tábor přijelo 20 chlapců a 15 dívek. Po příjezdu se volí pracovní četa na první den, tj. nejdříve jeden zástupce velitele tábora, potom dva pomocníci do kuchyně a nakonec dvojice do táborové hlídky. Každý může zastávat pouze jednu funkci.

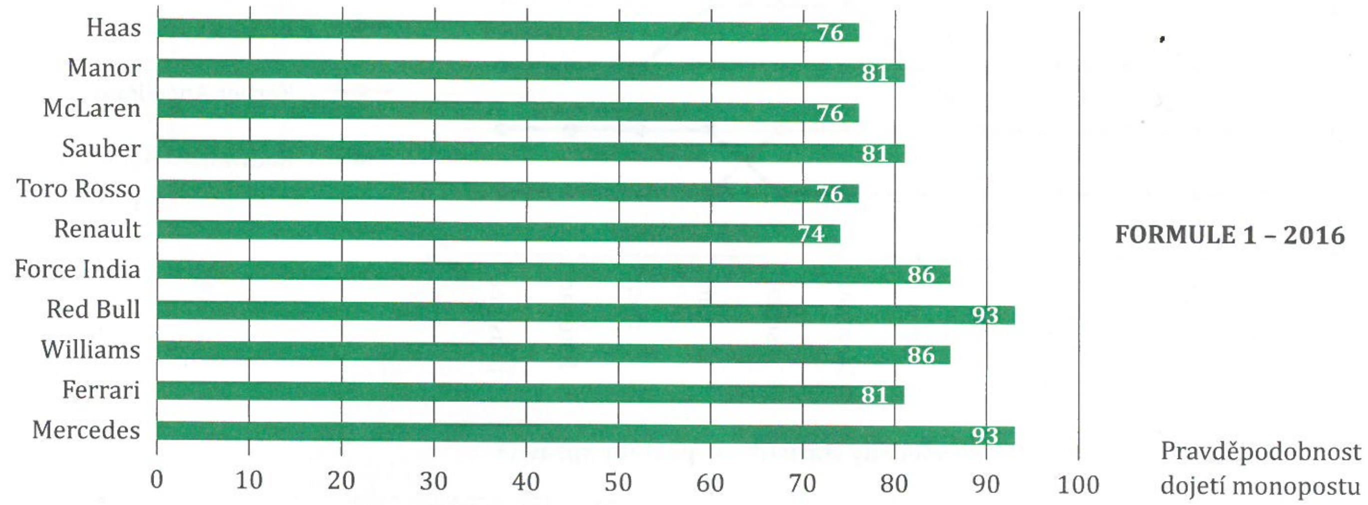
9 Přiřaďte ke každému jevu (9.1–9.3) pravděpodobnost (A–E), se kterou může nastat.
(Zaokrouhlete na jednotky procent.)

9.1 Zástupce velitele bude chlapec. ....
9.2 Pomocníci do kuchyně budou dívky. ....
9.3 V táborové hlídce bude jeden chlapec a jedna dívka. ....

A) 19 %
B) 36 %
C) 50 %
D) 57 %
E) 68 %

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 10

Následující graf vyjadřuje pravděpodobnost dojetí monopostu (tj. dokončení závodu) jednotlivých týmů formule 1 v mistrovství světa za rok 2016.



10 Přiřaďte ke každému jevu (10.1–10.3) pravděpodobnost (A–F), se kterou může nastat.

10.1 Závod dokončí Mercedes i Red Bull. ....
10.2 Ferrari <u>nedokončí</u> závod. ....
10.3 Závod <u>nedokončí</u> ani McLauren, ani Renault. ....
10.4 Závod dokončí Williams, ale <u>nedokončí</u> ho Force India. ....

A) 75 %
B) 6 %
C) 86 %
D) 92 %
E) 19 %
F) 12 %

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 11

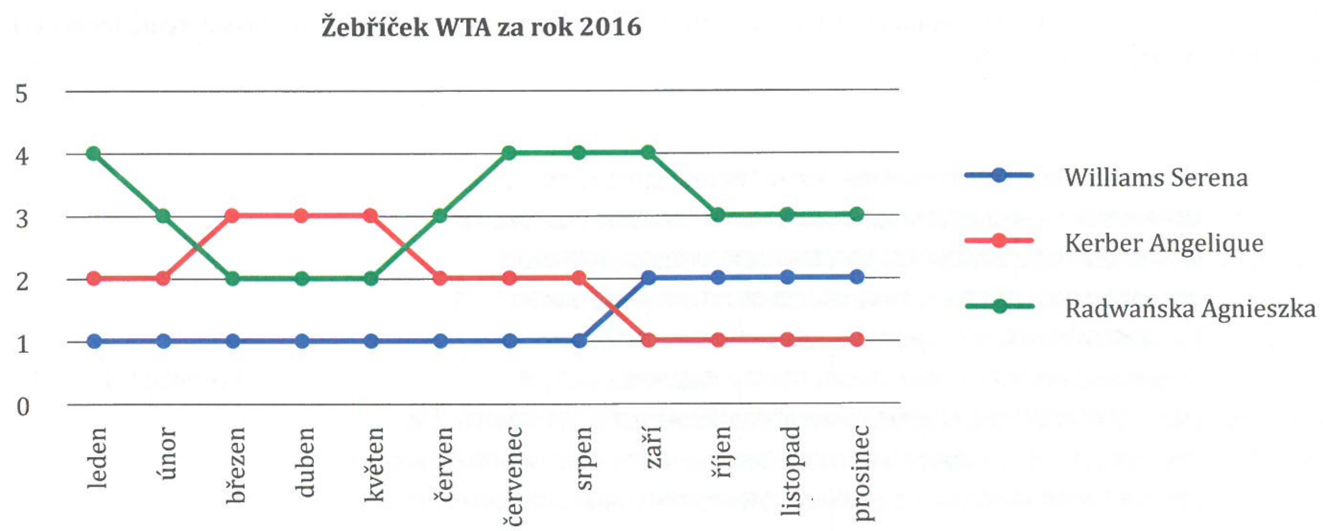
Následující tabulka zachycuje bodové zisky jednotlivých extraligových týmů v hokeji po posledním, 52. kole ročníku 2015/2016.

1.	Liberec	118	**6.**	Mladá Boleslav	83	**11.**	Vítkovice	66
2.	Sparta	?	**7.**	Zlín	81	**12.**	Pardubice	57
3.	Hradec Králové	88	**8.**	Chomutov	78	**13.**	Litvínov	?
4.	Plzeň	87	**9.**	Brno	69	**14.**	Karlovy Vary	47
5.	Olomouc	85	**10.**	Třinec	68			

11 Kolika bodů dosáhl Litvínov, byl-li průměrný počet bodů všech týmů roven počtu bodů, kterého dosáhl Chomutov, a víme-li, že Sparta dosáhla dvojnásobného počtu bodů než Litvínov?

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 12

Na grafu je znázorněn tenisový žebříček WTA za rok 2016. Po měsících je zachycena pozice hráček na žebříčku.



12 Určete, ve které z tabulek jsou všechny statistiky vypočteny správně.

A)

WTA 2016	průměr	modus	medián
Williams Serena	1,23	1	1

B)

WTA 2016	průměr	modus	medián
Kerber Angelique	2,00	2	2

C)

WTA 2016	průměr	modus	medián
Radwańska Agnieszka	3,08	3	3,5

D)

WTA 2016	průměr	modus	medián
Kerber Angelique	1,92	2	2

E)

WTA 2016	průměr	modus	medián
Radwańska Agnieszka	3,00	3	3