

## Algebraické výrazy

**Výraz** = každý zápis, který je správně utvořen podle zásad o zápisech čísel, proměnných, výsledků operací, hodnot funkcí.

Např. :  $2\pi r$ ,  $a^2 + b^2$ , .....

Výrazy :

- číselné
- s proměnnou
- Významnou skupinu tvoří lomené výrazy s neznámou ve jmenovateli ( musí být uvedena podmínka, výraz má smysl pouze tehdy, není-li neznámá ve jmenovateli )
- Další významnou skupinou jsou mnohočleny

### **Mnohočleny**

#### **1) Sčítání (odčítání) mnohočlenů:**

Sčítat a odčítat můžeme pouze členy označené týmž písmenem ve stejné mocnině

Příklad:

$$a + 2b + 3c - 4a + b - 5c = -3a + 3b - 2c$$

$$x^2 + y^3 - z^2 - 2x^2 + 4y^3 + y^2 = -x^2 + 5y^3 - z^2 + y^2$$

Obsahuje-li mnohočlen závorky, před nimiž stojí znaménko minus, změni všechny členy uvnitř závorky po jejím odstranění své znaménko.

Příklad:

$$a^2 + 2a - \{3a - [a - (a^2 - 2a - 1) - 2]\} = a^2 + 2a - \{3a - [a - a^2 + 2a + 1 - 2]\} = a^2 + 2a - \{3a - [3a - a^2 - 1]\} = a^2 + 2a - \{3a - 3a + a^2 + 1\} = a^2 + 2a - a^2 - 1 = \underline{2a - 1}$$

#### **2) Násobení mnohočlenu jednočlenem:**

Násobíme - li mnohočlen jednočlenem, musíme tímto jednočlenem násobit každý člen mnohočlenu.

Příklad:

$$m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$$

$$m \cdot (a + b + c) = m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c$$

#### **3) Násobení dvojčlenu dvojčlenem:**

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Musíme násobit každý člen s každým.

#### **4) Násobení mnohočlenu mnohočlenem:**

Každý člen prvního mnohočlenu násobíme každým členem mnohočlenu druhého.

Příklad:

$$(x^2 + 2xy + y^2) \cdot (x - 3) = x^3 + 2x^2y + xy^2 - 3x^2 - 6xy - 3y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x^2y - 6xy + xy^2 - 3y^2$$



a) Dělení mnohočlenu mnohočlenem:

Dodržujeme postup ukázaný na následujícím příkladě:

Příklad:

$$(20a^3 + 32a^2 + 7a^4 - 5a) : (-1 + 7a)$$

Řešení:

➤ Členy nejprve srovnáme podle velikosti mocniny:

$$(7a^4 + 20a^3 + 32a^2 - 5a) : (7a - 1)$$

➤ První člen dělence dělíme prvním členem dělitele:

$$(7a^4 + 20a^3 + 32a^2 - 5a) : (7a - 1) = a^3 + 3a^2 + 5a$$

$$\begin{array}{r} \ominus (7a^4 - a^3) \\ \hline 21a^3 + 32a^2 - 5a \\ \ominus (21a^3 - 3a^2) \\ \hline 35a^2 - 5a \\ \ominus (35a^2 - 5a) \\ \hline 0 \end{array}$$

➤ získaným podílem násobíme postupně všechny členy dělitele a píšeme pod členy dělence se stejnou mocninou  
➤ zbytek odečteme od původního dělence  
Uvedený postup opakujeme, dokud je dělení možné

c) Dělení mnohočlenu mnohočlenem se zbytkem:

Příklad:

$$\begin{array}{r} (3a^3 - 4a + 5) : (a - 1) = 3a^2 + 3a - 1 + \frac{4}{a - 1} \quad \left. \vphantom{\frac{4}{a - 1}} \right\} \text{zbytek zapišeme ve tvaru podílu} \\ \hline -(3a^3 - 3a^2) \\ \hline (3a^2 - 4a + 5) \\ \hline -(3a^2 - 3a) \\ \hline -a + 5 \\ \hline -(-a + 1) \\ \hline 4 \end{array}$$

Součástí těchto příkladů by měla být zkouška : podíl násobíme dělitelem, jako výsledek získáme dělenec.

Cvičení:

1. Dělte mnohočleny:  $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$  [  $2x - 5$  ]
1. Dělte mnohočleny:  $(9y^4 + 26y^2 + 25) : (3y^2 - 2y + 5)$  [  $3y^2 + 2y + 5$  ]
1. Dělte mnohočleny:  $(3x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 28x - 32) : (3x - 4)$  [  $x^3 + 5x^2 + 13x + 8$  ]
1. Dělte mnohočleny:  $(a^5 - 1) : (a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$  [  $a - 1$  ]
2. Dělte mnohočleny:  $(4a^4 - 14a^3b - 24a^2b^2 - 54b^4) : (a^2 - 3ab - 9b^2)$  [  $4a^2 - 2ab + 6b^2$  ]
3. Dělte mnohočleny:  $(15m^4 - m^3 - m^2 + 41m - 70) : (3m^2 - 2m + 7)$  [  $5m^2 + 3m - 10$  ]



$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Cvičení:

1.) Vypočítejte:

a)  $(2xy + 1) \cdot (2xy - 1)$

c)  $(5a^2 - 3b) \cdot (5a^2 + 3b)$

b)  $(1 + 3ab) \cdot (1 - 3ab)$

d)  $(4m^2 + 6n) \cdot (4m^2 - 6n)$

[ a)  $4x^2y^2 - 1$  ; b)  $1 - 9a^2b^2$  ; c)  $25a^4 - 9b^2$  ; d)  $16m^4 - 36n^2$  ]

2.) Vypočítejte:

a)  $(x + 10)^2$

d)  $(m^2 + n^2)^2$

g)  $(x^3 - 1)^2$

b)  $(y^2 + 1)^2$

e)  $(5ab - c)^2$

h)  $(a - \frac{1}{a})^2$

c)  $(a^2 + 0,1)^2$

f)  $(3 - 5n)^2$

i)  $(4a^2b + 5a^3b^2)^2$

[ a)  $x^2 + 20x + 100$  ; b)  $y^4 + 2y^2 + 1$  ; c)  $a^4 + 0,2a^2 + 0,01$  ; d)  $m^4 + 2m^2n^2 + n^4$  ; e)  $25a^2b^2 - 10abc + c^2$  ; f)  $9 - 30n + 25n^2$  ; g)  $x^6 - 2x^3 + 1$  ; h)  $a^2 - a + 0,25$  ; i)  $16a^4b^2 + 40a^5b^3 + 25a^6b^4$  ]

3.) Vypočítejte:

a)  $(a^2 - 1)^3$

d)  $(2a - 3b)^3$

g)  $(10m^4 - 6m^2)^3$

b)  $(2 + a)^3$

e)  $(x^2 - y^2)^3$

h)  $(7p^3 + 9q^4)^3$

c)  $(3 - b)^3$

f)  $(4x^3 + 5y^2)^3$

i)  $(x^n - 1)^3$

[ a)  $a^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1$  ; b)  $8 + 12a + 6a^2 + a^3$  ; c)  $27 - 27b + 9b^2 - b^3$  ; d)  $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$  ; e)  $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$  ; f)  $64x^9 + 240x^6y^2 + 300x^3y^4 + 125y^6$  ; g)  $1000m^{12} - 1800m^{10} + 1080m^8 - 216m^6$  ; h)  $343p^9 + 1323p^6q^4 + 1701p^3q^8 + 729q^{12}$  ; i)  $x^{3n} - 3x^{2n} + 3x^n - 1$  ]

4.) Rozložte na součin podle vzorce:

a)  $m^2 - k^2$

e)  $-25 + b^2$

i)  $27 - m^3$

b)  $c^2 - 64$

f)  $125 + x^3$

j)  $k^9 + 1$

c)  $0,25 - s^6$

g)  $b^3 - 8$

k)  $n^3 + 1000$

d)  $-16x^4 + 81$

h)  $v^3 + 512$

5.) Rozložte na součin podle vzorce:

a)  $(x - 3)^2 - y^2$

d)  $81 - (c - 3)^2$

b)  $(6 - a)^2 - (1 + d)^2$

e)  $4g^2 - (g - 8)^2$

c)  $9(x - 1)^2 - 1$

f)  $25r^2 - (7 + r)^2$

6.) Rozložte na součin podle vzorce:

a)  $4 + 4a + a^2 - 9b$

e)  $x^2 + 10x + 25 - 4a^2$

b)  $k^2 - 64 + 16m - m^2$

f)  $25 - x^2 - 4y^2 + 4xy$

c)  $49x^2 - y^2 - 2y - 1$

g)  $36b^2 - h^2 - 49 + 14h$

d)  $p^2 - 8p + 16 - 100t$

h)  $1 - y^2 - 8ay - 16a^2$

7.) Rozložte na součin podle vzorce:

a)  $25x^2 - y^2 + 5x - y$

d)  $100m^2 - 30m - p^2 - 3p$

b)  $4x^2 - y^2 - 14x + 7y$

e)  $a^2 - 36b^2 - a - 6b$

c)  $16a^2 - 20a + 35b - 49b^2$

f)  $x^2 - 9c^2 + 3c + x$

g)  $81a^2 - 18a - 20d - 100d^2$

h)  $24p - 36p^2 + m^2 - 4m$

## Rozklad kvadratického trojčlenu

Používá se zejména při krácení lomených výrazů nebo řešení nejjednodušších kvadratických rovnic.

Některé trojčleny je možno rozložit na tvar:  $(x + m)(x + n)$

Roznásobíme-li závorky, získáme:  $(x + m)(x + n) = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m + n)x + mn$

Odtud je vidět, že  $b = m + n$   
 $c = m \cdot n$

Příklad:

Rozložme trojčlen  $x^2 + 3x + 2$

Řešení:

Hledáme takovou dvojici čísel, která po vynásobení dává hodnotu 2 a při sečtení hodnotu 3.

Je to dvojice 1, 2

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

Příklad:

Rozložme trojčlen  $x^2 - 5x + 6$

Řešení:

Protože lineární člen tohoto trojčlenu je záporný a absolutní člen je kladný, musí být obě hledaná čísla rozkladu záporná.

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Příklad:

Rozložme trojčlen  $x^2 + 2x - 8$

Řešení:

Protože lineární člen tohoto trojčlenu je kladný a absolutní člen je záporný, musí být jedno hledané číslo rozkladu záporné a jedno kladné.

$$x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

Cvičení:

Rozložte trojčleny

8.)  $x^2 - x - 6$

17.)  $x^2 - 6x + 8$

9.)  $x^2 + 5x + 4$

18.)  $x^2 + x - 12$

10.)  $x^2 + 7x + 12$

19.)  $x^2 - 7x + 12$

11.)  $x^2 - 4x + 3$

20.)  $x^2 - 5x - 6$

12.)  $x^2 - 4x - 12$

21.)  $x^2 - 10x - 24$

13.)  $x^2 + 2x - 3$

22.)  $x^2 + 6x - 16$

14.)  $x^2 - 7x + 10$

23.)  $x^2 + 9x + 18$

15.)  $x^2 + 8x + 15$

24.)  $x^2 - 18x - 40$

16.)  $x^2 - 28x + 75$

25.)  $x^2 + 12x - 64$

## Lomené výrazy

Jsou to výrazy se zlomky, v nichž se neznámá vyskytuje i ve jmenovateli zlomku. Pracujeme s nimi obdobně jako s číselnými zlomky, řešení musí obsahovat uvedení podmínek, za nichž má výraz smysl – nesmí být nula ve jmenovateli!

26.) Krat'ite zlomek:

a)  $\frac{x^2 - 36}{x^2 + 36 - 12x}$

c)  $\frac{2m^2 - 20m + 50}{4m - 20 + 6ym - 30y}$

b)  $\frac{3x + 12 - px - 4p}{x^2 - 16}$

d)  $\frac{k^4 - r^4}{r^3 - rk^2}$

[ a)  $\frac{x+6}{x-6}; x \neq 6$  ; b)  $\frac{3-p}{x-4}; x \neq \pm 4$ ; c)  $\frac{m-5}{2+3y}; y \neq -\frac{2}{3}$ ; d)  $-\frac{k^2+r^2}{r}; r \neq 0, r \neq \pm k$  ]

27.) Násobte zlomky:

a)  $\frac{x^2 - 16}{2x^4} \cdot \frac{10x^3}{20 - 5x}$

c)  $\frac{(x+2)^2}{3} \cdot \frac{3x^2 - 12x + 12}{x^3 + 4x^2 + 4x} \cdot \frac{x}{(x-2)^3}$

b)  $\frac{a^3 + 1}{1 + 2a + a^2} \cdot \frac{a + 1}{3a^2 + 3 - 3a}$

d)  $\frac{4x^2 - 4x + 4}{2x} \cdot \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

[ a)  $-\frac{x+4}{x}; x \neq 0$ ; b)  $\frac{1}{3}; a \neq -1$ ; c)  $\frac{1}{x-2}; x \neq \pm 2$ ; d)  $\frac{2}{x-1}; x \neq 0; x \neq \pm 1$  ]

28.) Zjednodušte výraz:

a)  $\frac{(a-5)^2 - 1}{5a - 30} : \frac{a^3 - 16a}{20a^2}$

c)  $\frac{5y^3 - 40}{14y - 7y^2} : (4y^2 + 16 + 8y)$

b)  $\frac{3b^2 - 18b + 27}{3y - 12} : \frac{9 - b^2}{3y - 12 + by - 4b}$

d)  $\frac{x^4 - 16}{x^2 + 4 + 4x} : \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{2}$

[ a)  $\frac{4a}{a+4}; a \neq 0; a \neq 6; a \neq \pm 4$ ; b)  $3 - b; b \neq \pm 3; y \neq 4$ ; c)  $-\frac{5}{28y}; y \neq 0; y \neq -2$  d)

$\frac{2x}{x+2}; x \neq \pm 2; x \neq 0$  ]

29.) Zjednodušte výraz:

$\frac{7}{5a-5} + \frac{11}{10-10a}$

[  $\frac{3}{10(a-1)}; a \neq 1$  ]

30.) Zjednodušte výraz:

$\frac{5}{x-3} - \frac{x-2}{x^2-9} + \frac{x-1}{2x+6}$

[  $\frac{x^2+4x+37}{2(x^2-9)}; x \neq \pm 3$  ]

31.) Zjednodušte výraz:

$\frac{2x+2y}{3y-6} : \frac{x+y}{y-2}$

[  $\frac{2}{3}$  ]

32.) Zjednodušte výraz:

$\frac{1-3y}{y^2-y} - \frac{3}{1-y}$

[  $\frac{1}{y^2-y}$  ]

33.) Zjednodušte výraz:

$\frac{2u-2}{u^2-1} + \frac{u+1}{u-1} + \frac{u-1}{u+1}$

[  $\frac{2u}{u-1}$  ]

34.) Zjednodušte výraz:

$\frac{2(a+b)}{3a-3b} : \frac{6a+6b}{a^2-ab}$

[  $\frac{a}{9}$  ]

35.) Zjednodušte výraz:

$\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1-m} - \frac{1}{1-m^2}$

[  $\frac{1}{1-m^2}$  ]

- 36.) Zjednodušte výraz:  $\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) : \frac{1+x}{1-x}$   $\left[\frac{1}{1+x}\right]$
- 37.) Zjednodušte výraz:  $\frac{a+c}{ac-bc} - \frac{a-1}{2(b-a)}$   $\left[\frac{2a+c+ac}{2c(a-b)}\right]$
- 38.) Zjednodušte výraz:  $\frac{1}{t+1} + \frac{2}{t+2} - \frac{3}{2t+2}$   $\left[\frac{3t+2}{2(t+1)(t+2)}\right]$
- 39.) Zjednodušte výraz:  $\frac{a}{x^2-2} + \frac{bx}{2x-x^3}$   $\left[\frac{a-b}{x^2-2}\right]$
- 40.) Zjednodušte výraz:  $\frac{b}{3}\left(5 + \frac{7b}{3a+b}\right) \cdot \left(1 - \frac{2a+3b}{5a+4b}\right)$   $[b]$
- 41.) Zjednodušte výraz:  $\left(\frac{1}{x-1} + 1\right) + \left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$   $\left[\frac{2x}{x^2-1}\right]$
- 42.) Zjednodušte výraz:  $\frac{2a}{a+b} - \frac{3b}{b-a} - \frac{2a^2+3b^2}{a^2-b^2}$   $\left[\frac{ab}{a^2-b^2}\right]$
- 43.) Zjednodušte výraz:  $\frac{a^2-25}{a^2+10a+25} : \frac{7a-35}{a^2+5a}$   $\left[\frac{a}{7}\right]$
- 44.) Zjednodušte výraz:  $\frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x+2}{2(1-x^2)}$   $\left[\frac{x^2+2x}{2x(x^2-1)} + 2\right]$
- 45.) Zjednodušte výraz:  $\frac{2}{a} - \frac{3}{1-2a} - \frac{2a-3}{4a^2-1}$   $\left[\frac{12a^2-6a-2}{a(4a^2-1)}\right]$
- 46.) Zjednodušte výraz:  $\frac{3a^2+12a+12}{a-2} : \frac{6(a+2)}{a^2-4}$   $\left[\frac{(a+2)^2}{2}\right]$
- 47.) Zjednodušte výraz:  $\frac{2x+1}{x^2+2x} - \frac{3x+2}{4-x^2}$   $\left[\frac{5x^2-x-2}{x(x^2-4)}\right]$
- 48.) Zjednodušte výraz:  $1 + \frac{1}{n-1} - \frac{n+1}{n}$   $\left[\frac{1}{n(n-1)}\right]$
- 49.) Zjednodušte výraz:  $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\left(a - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b-a} - 1\right)$   $\left[\frac{a^2}{b^2}(b-1)\right]$
- 50.) Zjednodušte výraz:  $\frac{2+x}{(x-3)^2} - \frac{2-x}{9-x^2}$   $\left[\frac{10x}{(x-3)^2(x+3)}\right]$
- 51.) Zjednodušte výraz:  $\frac{7v-1}{2v^2+6v} + \frac{5-3v}{v^2-9}$   $\left[\frac{v^2-12v+3}{2v(v^2-9)}\right]$
- 52.) Zjednodušte výraz:  $\left(\frac{m+1}{m+2} - \frac{m-1}{m-2}\right) \cdot \frac{m^2-4}{2m}$   $[-1]$
- 53.) Zjednodušte výraz:  $\frac{\frac{x}{4} - 1 + \frac{1}{x}}{x+2} : \frac{x-2}{x \cdot 4}$   $\left[\frac{x-2}{x+2}\right]$



- 54.) Zjednodušte výraz:  $\frac{\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$  [  $a - b$  ]
- 55.) Zjednodušte výraz:  $\frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}$  [  $\frac{x}{x - y}$  ]
- 56.) Zjednodušte výraz:  $\frac{\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2 + b^2}{ab} - 2}$  [  $\frac{b}{a - b}$  ]
- 57.) Zjednodušte výraz:  $\frac{\frac{2r + 2s}{3r - 3s}}{\frac{6r + 6s}{r^2 - rs}}$  [  $\frac{r}{9}$  ]
- 58.) Zjednodušte výraz:  $\frac{\frac{1 + k}{2k}}{\frac{k^2 - 1}{5k}}$  [  $\frac{5}{2(k - 1)}$  ]
- 59.) Zjednodušte výraz:  $\frac{1 + \frac{m}{n}}{n - \frac{m^2}{n}}$  [  $\frac{1}{n - m}$  ]
- 60.) Zjednodušte výraz:  $\frac{2 - \frac{k^2 + z^2}{kz}}{\frac{k}{z^2} - \frac{2}{z} + \frac{1}{k}}$  [  $-z$  ]