II. AUTORSKÉ ŘEŠENÍ

1 bod

1 **Určete hodnotu výrazu $\frac{7x-11}{11-7x}$ pro $x = \frac{27}{32}$.**

Daný výraz zjednodušíme: $\frac{7x-11}{11-7x} = \frac{7x-11}{-(-11+7x)} = -1$. Výraz je roven číslu -1 pro každé $x \neq \frac{11}{7}$.

Stejný výsledek bychom dostali při dosazení $x \neq \frac{27}{32}$ do daného výrazu, ale řešení by bylo mnohem pracnější.

Řešení: – 1.

B 14

max. 2 body

2 Aritmetický průměr čtyř čísel je roven $\frac{9}{4}$. Známe pouze tři z těchto čísel: $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}$.

Určete čtvrté číslo. Výsledek zapište ve tvaru zlomku v základním tvaru.

Aritmetický průměr čísel vypočítáme jako součet čtyř čísel dělený čtyřmi. Jestliže neznámé číslo označíme x, řešíme rovnici:

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+x}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+x = 9$$

$$8+9+6+12x = 108$$

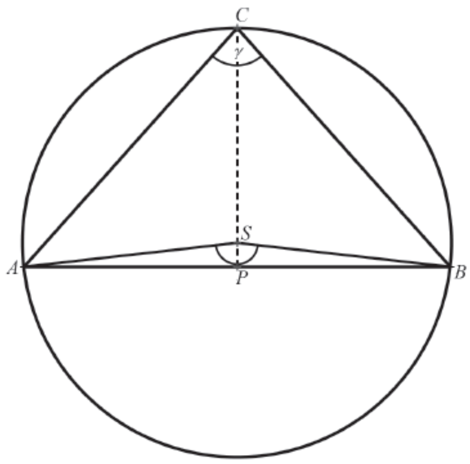
$$12x = 85$$

$$x = \frac{85}{12}$$

Řešení: $x = \frac{85}{12}$

max. 2 body

3 V trojúhelníku ABC s délkami stran $a = b = 6$ cm, $c = 8$ cm je S střed kružnice opsané. **Vypočítejte velikost konvexního úhlu ASB. Výsledek ve stupních zaokrouhlete na jednotky.**



V rovnoramenném trojúhelníku ABC vypočítáme polovinu úhlu γ.

Platí: $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, tedy $\frac{\gamma}{2} \approx 41{,}8°$, $\gamma \approx 83{,}6°$.

K výpočtu úhlu ASB využijeme vztah mezi obvodovým a středovým úhlem příslušným k témuž oblouku kružnice. Středový úhel je roven dvojnásobku obvodového úhlu.
Konvexní úhel ASB má (po zaokrouhlení) velikost 167°.

Řešení: 167°

max. 2 body

4 **Pro kolik přirozených čísel x je výraz $17\sqrt{2} - \frac{3}{7}x$ kladný?**

V oboru přirozených čísel řešíme nerovnici $17\sqrt{2} - \frac{3}{7}x > 0$.
$119\sqrt{2} > 3x$
$x < \frac{119\sqrt{2}}{3}$
Určíme přibližnou hodnotu číselného výrazu na pravé straně nerovnice
$\frac{119\sqrt{2}}{3} \approx 56{,}1$.
Řešením nerovnice v oboru přirozených čísel jsou všechna přirozená čísla menší nebo rovna 56. Daný výraz je kladný pro 56 přirozených čísel x.

Řešení: 56

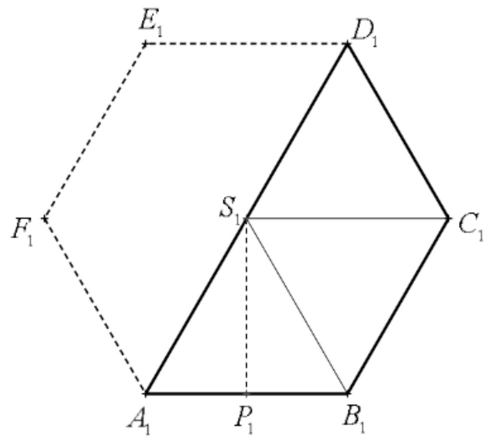
VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Délka podstavné i boční hrany pravidelného šestibokého hranolu $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ je rovna 4 cm. Šestiboký hranol je rozdělen rovinou $A_1D_1D_2$ na dva shodné čtyřboké hranoly.

max. 4 body

5

5.1 Vypočítejte objem hranolu $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Zapište přesnou (nezaokrouhlenou) hodnotu objemu.



Podstava čtyřbokého hranolu se skládá ze tří rovnostranných trojúhelníků, jejichž strana má délku 4 cm. Pro výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníku lze využít speciální vzorec $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Pro trojúhelník $A_1B_1S_1$ platí $S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ cm².

Můžeme také podle Pythagorovy věty nejdříve vypočítat výšku rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1S_1$:

$|S_1P_1| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm.

Obsah trojúhelníku je roven: $S = \frac{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm².

Obsah podstavy $A_1B_1C_1D_1$ je roven $S_p = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm².

Výška čtyřbokého hranolu je rovna délce boční hrany: $v = 4$ cm.

Objem hranolu určíme podle vzorce: $V = S_p \cdot v$.

Objem hranolu $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ je roven $V = 12\sqrt{3} \cdot 4 = 48\sqrt{3}$ cm³.

Řešení: $48\sqrt{3}$ cm³

5.2 Vypočítejte obsah jeho boční stěny $A_1D_1D_2A_2$.

Stěna $A_1D_1D_2A_2$ má tvar obdélníku, ve kterém strana A_1D_1 má délku 8 cm (rovnou průměru šestiúhelníku) a strana A_1A_2 měří 4 cm podle zadání.
Obsah boční stěny $S = 8 \cdot 4 = 32\ \text{cm}^2$.

Řešení: 32 cm²

max. 2 body

6 Ze vzorce pro paralelní zapojení rezistorů $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ vyjádřete neznámý odpor R_1.

Rovnici $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ upravíme vynásobením obou stran součinem jmenovatelů:
$R \cdot R_2 + R \cdot R_1 = R_1 \cdot R_2$
Převedeme výrazy, které obsahují neznámou na pravou stranu rovnice:
$R \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2 - R \cdot R_1$
Na pravé straně rovnice vytkneme neznámou R_1:
$R \cdot R_2 = R_1 \cdot (R_2 - R)$
Obě strany rovnice dělíme výrazem $(R_2 - R)$:
$$R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$$

Řešení: $\boldsymbol{R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}}$

B 14

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 7

Na turnaji hraje 24 týmů. Nejdříve jsou rozděleny do 4 skupin po 6 týmech, ve kterých každý tým s každým sehraje jedno utkání. Dva týmy z každé skupiny postupují do čtvrtfinále, v němž se stejně jako v následném semifinále hraje vyřazovacím způsobem. Týmy, které v semifinále zvítězily, se utkají ve finále v jednom zápase o první místo. Týmy, které v semifinále prohrály, se v jednom zápase utkají o místo třetí.

max. 4 body

7

7.1 **Kolik utkání sehraje vítěz turnaje?**

Vítěz turnaje sehraje 5 utkání ve skupině, jedno ve čtvrtfinále, 1 utkání v semifinále a finálové utkání, celkem 8 utkání.

Řešení: 8

7.2 **Kolik utkání je sehráno celkem?**

V každé šestičlenné skupině vypočítáme počet zápasů jako počet dvojčlenných kombinací z 6 prvků:

$K(2; 6) = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Ve 4 skupinách je celkem sehráno 60 utkání. Do čtvrtfinále postoupí 8 týmů a sehrají 4 utkání. V semifinále 4 týmy sehrají 2 zápasy. Další dva zápasy jsou finále a utkání o 3. místo.

Celkem je na turnaji sehráno 60 + 4 + 2 + 2 = 68 utkání.

Řešení: 68

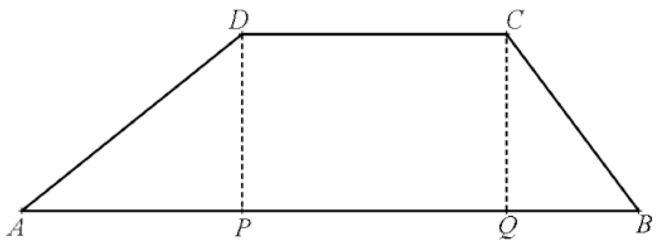
max. 2 body

8 Lichoběžník *ABCD* má obsah 40 cm^2. Základny lichoběžníku mají délky $|AB| = 14$ cm, $|CD| = 6$ cm, rameno $|BC| = 5$ cm.

Určete délku ramene *AD*. Výsledek v cm zapište ve tvaru odmocniny z přirozeného čísla.

Nejdříve vypočítáme výšku lichoběžníku ze vzorce $\frac{(a + c) \cdot v}{2}$.

Platí: $v = \frac{2S}{a + c} = \frac{2 \cdot 40}{14 + 6} = \frac{80}{20} = 4$ cm.



Lichoběžník rozdělíme kolmicemi k základnám na dva pravoúhlé trojúhelníky a obdélník. V trojúhelníku *QBC* nejdříve vypočítáme délku odvěsny *QB*. Podle Pythagorovy věty platí:

$|QB| = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm.

Pro výpočet délky ramene *AD* musíme ještě znát délku úseku *AP* na základně *AB*:

$|AP| = |AB| - |PQ| - |QB|$

$|AP| = 14 - 6 - 3 = 5$ cm

Nyní vypočítáme délku ramene *AD*:

$|AD| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$ cm

Řešení: $\sqrt{41}$ cm

max. 2 body

9 Vodní nádrž má tvar kvádru o rozměrech dna 50 m a 20 m. Každou minutu přitéká 40 hl vody. Napouštění prázdné nádrže začalo v 7:15.

V kolik hodin bude voda sahat do výše 180 cm?

A) 13:15
B) 14:45
C) 15:30
D) 16:20
E) 17:10

Nejdříve vypočítáme objem vody v nádrži, když sahá do výše 1,8 m.

Využijeme vzorec pro objem kvádru $V = abc$.

Objem vody $V = 50 \cdot 20 \cdot 1{,}8 = 1\,800\ \mathrm{m}^3 = 18\,000$ hl.

Doba napouštění: $t = 18\,000 : 40 = 450$ min = 7 h 30 min.

Konec napouštění: 14:45

Řešení: B

2 body

10 Řešte exponenciální rovnici $4^{x+1} = \sqrt{32}$. Ve kterém z níže uvedených intervalů leží kořen této rovnice? **Interval vyberte z možností A–E.**

A) $(0; 1)$
B) $(1; 2)$
C) $(2; 4)$
D) $(4; 10)$
E) v žádném z výše uvedených intervalů

Výrazy na levé i pravé straně rovnice postupně upravíme na stejný základ mocniny s racionálním exponentem:

$4^{x+1} = \sqrt{32}$

$(2^2)^{x+1} = \sqrt{2^5}$

$2^{2x+2} = 2^{\frac{5}{2}}$

Mocniny se stejným základem se rovnají, jestliže se rovnají také jejich exponenty:

$2x + 2 = \dfrac{5}{2}$

Vyřešíme tuto rovnici:

$2x = 0{,}5$

$x = 0{,}25$

Číslo 0,25 leží v intervalu $(0; 1)$.

Správná odpověď je A.

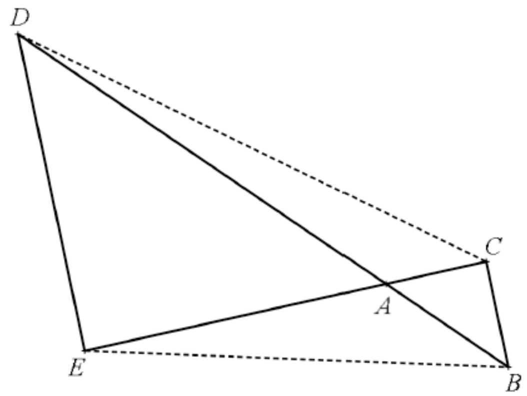
Řešení: A

max. 2 body

11 Obrazem trojúhelníka ABC ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem -3 je trojúhelník ADE. Bod D je obrazem bodu B v této stejnolehlosti.
Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (11.1–11.4), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE):

		ANO	NE
11.1	Obrazec $BCDE$ je lichoběžník.	☐	☐
11.2	Trojúhelník ADE má třikrát větší obvod než trojúhelník ABC.	☐	☐
11.3	Trojúhelník ADE má třikrát větší obsah než trojúhelník ABC.	☐	☐
11.4	Bod A je středem úsečky EC.	☐	☐

11.1



Obrazem úsečky ve stejnolehlosti je úsečka s ní rovnoběžná. Proto jsou úsečky *BC* a *DE* rovnoběžné. Trojúhelníky *ABC* a *ADE* jsou podobné s poměrem podobnosti, který je roven absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti, tedy číslu 3. Strana *DE* má trojnásobnou délku než strana *CB*. Protější strany *BC* a *DE* jsou tedy rovnoběžné a mají různou délku. Čtyřúhelník s těmito vlastnostmi se nazývá lichoběžník.
Tvrzení je pravdivé.

Řešení: ANO

11.2
Trojúhelníky *ABC* a *ADE* jsou podobné s poměrem podobnosti, který je roven absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti, tedy číslu 3. Každá strana trojúhelníku *ADE* má trojnásobnou velikost než příslušná strana trojúhelníku *ABC*. Obvod trojúhelníku je určen součtem délek stran. Platí, že součet trojnásobků čísel je roven trojnásobku součtu těchto čísel. Trojúhelník *ADE* má trojnásobný obvod než trojúhelník *ABC*.
Tvrzení je pravdivé.

Řešení: ANO

B 14

11.3
Obsah trojúhelníku vypočítáme, když délku strany násobíme příslušnou výškou a dělíme dvěma. Délka libovolné strany i příslušné výšky trojúhelníku *ADE* jsou trojnásobné než v trojúhelníku *ABC*. Platí: $|DE| = 3 \cdot |AB|$. Označíme x výšku na stranu *BC* v trojúhelníku *ABC* a y výšku na stranu *DE* v trojúhelníku *ADE*, platí $y = 3x$.

Obsah trojúhelníku *ABC*: $S_1 = \dfrac{|AB| \cdot x}{2}$

Obsah trojúhelníku *ADE*: $S_2 = \dfrac{|DE| \cdot y}{2} = \dfrac{3 \cdot |AB| \cdot 3x}{2} = 9 \cdot \dfrac{|AB| \cdot x}{2} = 9 \cdot S_1$

Trojúhelník *ADE* má devětkrát větší obsah než trojúhelník *ABC*.
Tvrzení je nepravdivé.

Řešení: NE

11.4
Platí, že $|AE| = 3 \cdot |AC|$. Bod *A* není tedy středem úsečky *AE*.
Tvrzení je nepravdivé.

Řešení: NE

2 body

12 Jsou dány body $K\,[-1; 5]$, $L\,[3; -5]$, $M\,[0; 7]$. Úsečky *KL* a *MN* mají společný střed.
Délku úsečky *MN* vyberte z možností A–E.

A) $2\sqrt{2}$
B) $5\sqrt{2}$
C) $10\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{5}$
E) $4\sqrt{5}$

Souřadnice středu *S* úsečky *KL* vypočítáme podle vzorce $S = \dfrac{K + L}{2}$, tedy jako aritmetické průměry z příslušných souřadnic krajních bodů úsečky.

Platí: $s_1 = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$, $s_2 = \dfrac{5 - 5}{2} = 0$, S [1; 0]. Nyní můžeme určit ze vzorce pro střed úsečky *MN* souřadnice bodu *N* a potom délku úsečky *MN*.
Jednodušší je určit pouze délku úsečky *MS* a vynásobit číslem 2:
$|MS| = \sqrt{(s_1 - m_1)^2 + (s_2 - m_2)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
$|MN| = 2 \cdot |MS| = 2 \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
Správně je možnost C.

Řešení: C

2 body

13 Součet prvních tří členů aritmetické posloupnosti je roven 42. Stejný výsledek dostaneme, když sečteme první čtyři členy této posloupnosti. **Vyberte pátý člen této posloupnosti z možností A–E.**

A) 5
B) 3
C) 0
D) –7
E) –9

Víme, že součet prvních tří členů aritmetické posloupnosti je roven součtu čtyř členů. Z toho plyne, že čtvrtý člen je roven nule.
Nyní dosadíme do vzorce pro součet prvních *n*-členů aritmetické posloupnosti:
$s_n = \dfrac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$.
Pro $n = 4$ je $s_4 = 42$, $a_4 = 0$. Platí: $42 = \dfrac{4\,(a_1 + 0)}{2}$, proto $a_1 = 21$.
Diferenci aritmetické posloupnosti určíme ze vzorce pro *n*-tý člen:
$a_n = a_1 + (n - 1)d$.
Dosazením pro $n = 4$ dostaneme:
$0 = 21 + (4 - 1)d$,
$d = -7$
Pátý člen vypočítáme nejrychleji, když diferenci přičteme ke čtvrtému členu:
$a_5 = a_4 + d = 0 + (-7) = -7$.
Zkoušku lze provést tak, že vypíšeme prvních 5 členů a zkontrolujeme podmínky úlohy:
21, 14, 7, 0, –7. Platí: $s_3 = 21 + 14 + 7 = 42$, $s_4 = 21 + 14 + 7 + 0 = 42$
Správná odpověď je D.

Řešení: D

2 body

14 Určete počet celých čísel, která vyhovují nerovnici $47 \cdot (7 - x) \cdot \left(\dfrac{x}{2} + 12\right) > 0$.
Počet čísel vyberte z možností A–E.

A) 24
B) 26
C) 28
D) 30
E) 32

B 14

Nerovnici $47 \cdot (7 - x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 12\right) > 0$ nejdříve vyřešíme v množině všech reálných čísel.

Nerovnice je ekvivalentní s nerovnicí $(7 - x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 12\right) > 0$.

Určíme nulové body výrazu na levé straně nerovnice:
Z rovnice $7 - x = 0$ plyne $x = 7$.

Z rovnice $\frac{x}{2} + 12 = 0$ plyne $x = -24$.

Nulovými body je množina reálných čísel rozdělena na tři intervaly.

Pro $x \in (-\infty; -24)$ je výraz $(7 - x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 12\right)$ záporný. Znaménko můžeme zjistit

například dosazením čísla z daného intervalu, např. $x = -26$.

Platí: $(7 - x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 12\right) = (7 + 26) \cdot \left(\frac{-26}{2} - 2\right) = 33 \cdot (-15) < 0$.

Obdobně zjistíme, že pro $x \in (-24; 7)$ je výraz $(7 - x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 12\right)$ kladný.
Například pro $x = 0$ je výraz roven $7 \cdot 12 = 84$.

Pro $x \in (7; +\infty)$ je výraz $(7 - x) \cdot \left(\frac{x}{2} + 12\right)$ záporný.

Řešení dané nerovnice v množině všech reálných čísel je interval $(-24; 7)$. V tomto otevřeném intervalu je 23 celých záporných čísel, 6 kladných celých čísel a číslo 0.
Celkem je zde 30 celých čísel, která vyhovují dané nerovnici.
Správně je možnost D.

Řešení: D

B 14

max. 4 body

15 V bodech 15.1–15.4 je slovní popis závislostí. **Přiřaďte jim funkce, které tyto závislosti vyjadřují. Funkce jsou určené rovnicemi a podmínkami pro proměnnou *x* v alternativách A–F.**

15.1 Jak závisí vzdálenost *y* v km, kterou ujede cyklista průměrnou rychlostí 15 km/h, na době jízdy *x*, vyjádřené v hodinách? Doba jízdy je minimálně 4 hodiny a maximálně 6 hodin.

15.2 Jak závisí doba *y* v hodinách, za který turista ujde vzdálenost 15 km, na jeho průměrné rychlosti *x* v km/h? Rychlost nabývá hodnot od 4 km/h do 6 km/h?

15.3 Jak závisí doba *y* v hodinách věnovaná práci, kterou bude vykonávat *x* pracovníků, kdyby jednotlivec tuto práci vykonal za 15 hodin? Předpokládáme stejný výkon všech pracovníků. Práci vykonávají minimálně 4 a maximálně 6 pracovníků.

15.4 Obdélník má obvod 30 cm. Jak závisí délka obdélníka y v cm na jeho šířce x v cm? Šířka nabývá hodnot od 4 cm do 6 cm.

A) $y = 15 - x, x \in \langle 4; 6 \rangle$

B) $y = \frac{15}{x}, x \in \langle 4; 6 \rangle$

C) $y = 15 + x, x \in \langle 4; 6 \rangle$

D) $y = \frac{15}{x}, x \in \{4; 5; 6\}$

E) $y = 15x, x \in \langle 4; 6 \rangle$

F) $y = 30 - 2x, x \in \langle 4; 6 \rangle$

15.1
Dráhu vypočítáme jako součin rychlosti a času. Čas je vymezen od 4 do 6 hodin.
Proto platí: $y = 15x, x \in \langle 4; 6 \rangle$

Řešení: E

B 14

15.2
Čas vypočítáme jako podíl dráhy a rychlosti. Rychlost je vymezena od 4 km/h do 6 km/h.
Proto platí: $y = \frac{15}{x}, x \in \langle 4; 6 \rangle$

Řešení: B

15.3
Dobu vypočteme, když 15 hodin vydělíme počtem pracovníků.
Proto platí: $y = \frac{15}{x}, x \in \{4; 5; 6\}$

Řešení: D

15.4
Obvod obdélníku je určen vzorcem $o = 2(a + b)$. Dosadíme-li dané údaje, vychází rovnice: $30 = 2(x + y)$.
Po úpravě dostaneme $y = 15 - x, x \in \langle 4; 6 \rangle$.

Řešení: A

KONEC TESTU